Feuille d'exercices II
Diagonalisation et trigonalisation

Exercice 1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $u(e_2)$, $u(e_1 + e_3)$ et $u(e_1 - e_3)$.
2. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.
3. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 3. Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u.
2. Montrer, sans calcul, qu'il existe une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base formée de vecteurs propres.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$? sur le corps $\mathbb{Q}$?

Exercice 5. Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ en donnant la matrice de passage :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Discuter en fonction de a, b et c dans $\mathbb{C}$ la possibilité de diagonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors son conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A de même multiplicité.
2. Montrer que si v est un valeur propre associé à λ, alors son conjugué $\overline{v}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

Exercice 8. Diagonaliser en donnant une matrice de passage la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^k pour tout entier naturel k avec et sans utiliser la diagonalisation.

Exercice 9. Pour n un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Ecrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Résoudre l'équation $u(P) = P$.

Exercice 10. Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$u\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.

Exercice 11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant A, trouver une solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $X^2 = A$

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que la trace de u est une valeur propre de u.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 13. On considère la matrice complexe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de A ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de A ?
3. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, A est diagonalisable.
4. Montrer que si son déterminant est nul, A n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que A est diagonalisable sauf si elle de rang un.
6. En supposant que la matrice A est réelle, à quelles conditions est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

Exercice 14. Pour les espaces vectoriels V_i et les applications linéaires $T_i \in \mathcal{L}(V_i)$ suivantes, trouver toutes les valeurs propres λ et les espaces propres correspondants $V_i(\lambda)$:

1. $V_1 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et T_1 l'application nulle ;
2. $V_2 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et $T_2 = \mathrm{Id}_n$ l'application identique ;
3. $V_3 = \mathbb{R}^2$ et T_3 définie par $T_3(z, w) = (z, 0)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{R}^2$;
4. $V_4 = \mathbb{R}^2$ et T_4 définie par $T_4(z, w) = (w, -z)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{R}^2$;
5. $V_5 = \mathbb{C}^2$ et T_5 définie par $T_5(z, w) = (w, -z)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$;
6. $V_6 = \mathbb{C}^2$ et T_6 définie par $T_6(z, w) = (5w + z, 5z)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$;
7. $V_7 = \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ et T_7 définie par $T_7(z_1, \cdots, z_n) = (z_1 + \cdots + z_n, \cdots, z_1 + \cdots + z_n)$ pour tout $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;
8. $V_8 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et T_8 un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire pour lequel il existe un entier naturel k tel que T_8^k est l'application nulle).

Exercice 15. On va considérer deux espaces vectoriels de dimension infinie dans cet exercice. La définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre est, dans ce cas, la même que dans le cas d'espaces vectoriels de dimension fini.

1. Soit V l'espace vectoriel des fonctions différentiables un nombre infini de fois et 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $L \in \mathrm{End}(V)$ défini par $L(f) = f''$. Montrer que les fonctions f_k, définies par $f_k(x) = \cos(kx)$ pour $k \in \mathbb{N}$, sont des vecteurs propres de L. Calculer les valeurs propres associées $\lambda_k \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles et soit l'application linéaire $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donnée par
$$S(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (a_1, a_2, a_3, \cdots).$$
Trouver toutes les valeurs propres de S et, pour chaque valeur propre λ, une base de V_λ.

Exercice 16. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\phi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice est A dans la base canonique.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de ϕ_A si et seulement si $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id_n}) = 0$.
2. Soient $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ les applications linéaires associées aux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de ϕ_A et ϕ_B.