Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

PARTIEL

19 octobre 2015 — durée 2 h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question de cours. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Donner l'énoncé du théorème de convergence monotone.
2. En déduire le théorème suivant : Si $f_n : X \to [0, \infty]$ est une fonction mesurable positive pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n.$$

Exercice 1. Soit X un ensemble dénombrable. On propose de déterminer toutes les tribus sur X.

1. Soit $\{X_i : i \in I\})$ une partition de X, c'est-à-dire $\emptyset \neq X_i \subseteq X$ pour $i \in I$ avec $\bigcup_{i\in I} X_i = X$ et $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
   Montrer que la collection des parties X_J de X de la forme $X_J = \bigcup_{i\in J} X_i$, où J parcourt les parties de I, est une tribu sur X (où l'on pose $\bigcup_{i\in\emptyset} X_i = \emptyset$).
2. Réciproquement, soit $\mathcal{T}$ une tribu sur X.
   (a) Pour $x, y \in X$ on pose $x \sim y$ si tout $A \in \mathcal{T}$ qui contient x contient galement y. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. En déduire que les $\sim$-classes forment une partition de X.
   (b) Montrer que pour tout $x \in X$ la $\sim$-classe $[x]$ de x est dans $\mathcal{T}$. Attention : Justifier que vous ne considérez que des intersections *dénombrables.*
   (c) Montrer que $[x]$ est minimal dans $\mathcal{T}$: si $A \in \mathcal{T}$, alors $[x] \cap A = \emptyset$ ou $[x] \subseteq A$.
   (d) En déduire que $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i\in J}[x_i] : J \subseteq I\}$, où $\{[x_i] : i \in I\}$ est la partition de X obtenu en (a).
3. Les tribus sur un ensemble non-dénombrable ne sont pas toutes de cette forme. Quelles parties de l'argument du point 2. ne marchent plus dans ce cas ?

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to Y$ une application. On rappelle que la tribu image directe $f(\mathcal{T})$ sur Y est défini par $B \in f(\mathcal{T})$ ssi $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, pour toute partie $B \subseteq Y$.

1. Montrer que $f(\mathcal{T})$ est bien une tribu sur Y.
2. Montrer que l'application

$$\nu : f(\mathcal{T}) \to [0, \infty[, \qquad \nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

   définit une mesure sur $(Y, f(\mathcal{T}))$.

Exercice 3. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soient A_1, $A_2, \ldots$, A_{100} des boréliens dans $[0, 1]$ tels que $\sum_{n=1}^{100} \lambda(A_n) > 99$. Montrer que $\bigcap_{n=1}^{100} A_n \neq \emptyset$.
[Indication : Commencer par montrer que la mesure du complément $\mu((\bigcap_{n=1}^{100} A_n)^c) < 1$.]