Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

Examen Final

13 janvier 2014 — durée 3 h

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. Sujet en **recto-verso**.

Notations

(a) λ_n est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions boréliennes et λ_n-intégrables dans $\mathbb{R}^n$.

Question 1.

1. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2.$$
[Indication : Calculer l'intégrale en coordonnées polaires, en faisant le changement de variables $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$ que l'on justifiera.]
2. En déduire la valeur de
$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Question 2. Pour $n > 0$ entier et s réel, on pose
$$g_n(x) = x^{s-1}e^{\,-nx}\chi_{]0,\infty[}(x).$$

On rappelle la définition de la fonction d'Euler :
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y \qquad \text{pour } s > 0,$$

et de la fonction ζ :
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad \text{pour } s > 1.$$

1. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty} g_n\,\mathrm{d}\lambda.$$
2. En déduire que
$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x = \Gamma(s)\zeta(s) \qquad \text{pour tout } s > 1.$$
3. En déduire aussi que
$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x = \infty, \qquad \text{pour tout } s \in]0,1].$$

Question 3.

1. Démontrer que pour tout réel z on a $1 - e^{-z} \leq z$.
2. Pour tout $y \geq 0$, démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable sur $]0, \infty[$.

   Pour $y \geq 0$ on pose
$$F(y) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$
3. Calculer (sans utiliser la suite de l'exercice)
$$\lim_{y \to \infty} \frac{F(y)}{y}.$$
   [Indication : Utiliser le théorème de convergence dominée.]
4. Démontrer que F est continue sur $[0, \infty[$ et dérivable sur $]0, \infty[$. Exprimer sa dérivée en fonction de l'intégrale I de la question 1.
5. Calculer F.

Question 4. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et $F(x, y) = f(x - y)\, g(y)$.

1. Montrer que pour λ_n–presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto F(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que le produit de convolution de f et g défini λ_n-presque partout par
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) \, \mathrm{d}y,$$
   vérifie $f * g = g * f$ λ_n-presque partout.
3. Montrer que
$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$
   [Indication : Utiliser le théorème de Fubini-Tonnelli pour montrer que $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$, et conclure.]

Question 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, définie par
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

1. Montrer que
$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
   [Indication : On trouve la primitive de $1/(1 + t^2)^2$ en intégrant par parties $1/(1 + t^2)$.]
2. Pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $S_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, calculer
$$\int_{S_\varepsilon} |f| \, \mathrm{d}\lambda_2.$$
   [Indication : Utiliser les coordonnées polaires.]
3. En déduire que la partie 1. n'est pas en contradiction avec le théorème de Fubini-Tonnelli.