Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

Examen Final

4 janvier 2016 — durée 3 h

Question 1. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe une suite $(A_n : n \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$. On pose $F = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

1. Justifier que $F \in \mathcal{T}$. Montrer que $x \in X$ appartient à F si et seulement si $x \in A_n$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\mu(F) = 0$.
3. On considère une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, et on suppose que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \infty.$$

En déduire que f_n converge μ-presque partout vers f (c'est-à-dire l'ensemble des $x \in X$ tel que $f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$ est μ-négligeable).

Solution

1. Puisque $A_k \in \mathcal{T}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{T}$ est clos par réunion dénombrable, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\bigcup_{k\geq n} A_k \in \mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ est clos par intersection dénombrable, $F \in \mathcal{T}$.
Si $x \in A_k$ pour une infinité de k, alors pour tout n il y a $k \geq n$ avec $x \in A_k$, et $x \in \bigcup_{k\geq n} A_k$. Donc $x \in \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k = F$.
Réciproquement, si $x \in A_k$ que pour un nombre fini de k, soit $n > \max\{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\}$. Alors $x \notin \bigcup_{k\geq n} A_k$, et donc $x \notin F$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$0 \leq \mu(F) \leq \mu(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \sum_{k\geq n} \mu(A_k).$$
Comme la série $\sum_{k\geq 0} \mu(A_k)$ est convergente, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \mu(A_k) = 0$. Ainsi $\mu(F) = 0$.
3. Soit $A_n^\epsilon = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$, et $F^\epsilon = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k^\epsilon$. Si $x \notin F^\epsilon$, alors $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout n sauf un nombre fini d'après 1. De plus, $\mu(F^\epsilon) = 0$ d'après 2. Si F est l'ensembles des $x \in X$ tel que $f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$, alors $F \subseteq \bigcup_{n>0} F^{1/n}$, et $\mu(\bigcup_{n>0} F^{1/n}) \leq \sum_{n>0} \mu(F^{1/n}) = 0$. Ainsi F est μ-négligeable.

Question 2. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $f :]0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction borélienne. On pose

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(x\, f(t))}{1+t^2} d\lambda(t).$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer la limite de F en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite lorsque $f(t) > 0$ pour λ-presque tout $t \in]0, \infty[$?
3. Vérifiér que pour tous $u, v \geq 0$ on a $\frac{2uv}{1+u^2v^2} \leq 1$. Montrer que F est de classe C^1 sur l'ouvert $]0, \infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

Solution. Soit

$$g(x,t) = \frac{\arctan(x\, f(t))}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad h(t) = \frac{\pi}{2\,(1+t^2)}.$$

Alors $h(t)$ est positif et intégrable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|g(x,t)| \leq h(t)$.

1. Puisque arctan est continue et f est borélienne, $t \mapsto g(x,t)$ est borélienne, et donc λ-mesurable, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme h est intégrable, $g(x,t)$ l'est aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$, et F est bien définie.

   Comme la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue en x pour tout $t \in]0, \infty[$, et bornée en module par $h(t)$, d'après le théorème de continuité sous l'intégrale la fonction $F(x)$ est continue.
2. Soit $X = \{t > 0 : f(t) > 0\}$. Puisque f est mesurable, X l'est aussi ; comme $\arctan(0) = 0$ on a

   $$F(x) = \int_0^\infty g(x,t)d\lambda(t) = \int_X g(x,t)d\lambda(t).$$

   Si $(x_n : n \in \mathbb{N})$ est une suite avec $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, alors les fonctions $g_n(t) = g(x_n, t)$ sont tous bornés en module par $h(t)$. D'après le théorème de la convergence dominée,

   $$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(t)d\lambda(t) = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(t)d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}\int_X \frac{1}{1+t^2}d\lambda(t).$$

   Si $f(t) > 0$ pour λ-presque tout t, alors $]0, \infty[\setminus X$ est λ-négligeable, et

   $$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \frac{\pi}{2}\int_X \frac{1}{1+t^2}d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}\int_{]0,\infty[} \frac{1}{1+t^2}d\lambda(t) = \frac{\pi^2}{4}.$$
3. On a $0 \leq (1-uv)^2 = 1 + u^2v^2 - 2uv$, d'où l'inégalité.

   Soit $a > 0$. Pour tous $x \geq a$ et $t > 0$ on a

   $$\frac{\partial}{\partial x}h(x,t) = \frac{f(t)}{(1+x^2f(t)^2)(1+t^2)},$$

   et donc

   $$\left|\frac{\partial}{\partial x}h(x,t)\right| \leq \frac{f(t)}{(1+x^2f(t)^2)(1+t^2)} \leq \frac{f(t)}{2xf(t)(1+t^2)} \leq \frac{1}{2a(1+t^2)}.$$

   Cette dernière fonction est intégrable. D'après le théorème de la dérivation sous l'intégral, F est dérivable de classe C^1 sur $[a, \infty[$, avec

   $$F'(x) = \int_{]0,\infty[} \frac{\partial}{\partial x}h(x,t)d\lambda(t) = \int_{]0,\infty[} \frac{f(t)}{(1+x^2f(t)^2)(1+t^2)}d\lambda(t).$$

   Cette formule est donc vraie pour $x \in]0, \infty[$.

Question 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose pour $x > 0$

$$f(x) = \frac{x\, e^{-ax}}{1 - e^{-bx}}.$$

Montrer que

$$\int_{]0,\infty[} f(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

Solution. On pose $f_n(x) = xe^{-(a+nb)x}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors pour $x > 0$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = xe^{-ax} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(e^{-bx}\right)^n = \frac{xe^{-ax}}{1+e^{-bx}} = f(x).$$

En intégrant par parties (les fonctions sont intégrables aus sens de Riemann), on a

$$\begin{aligned}\int_{]0,\infty[} f_n(x)\, d\lambda(x) &= \int_{]0,\infty[} xe^{-(a+nb)x} d\lambda(x) = \left.\frac{xe^{-(a+nb)x}}{-(a+nb)}\right|_0^{\infty} + \int_{]0,\infty[} \frac{e^{-(a+nb)x}}{a+nb} d\lambda(x) \\ &= \left.\frac{-e^{-(a+nb)x}}{(a+nb)^2}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{(a+nb)^2}.\end{aligned}$$

Comme les fonctions sont positives mesurables, d'après le théorème d'échange de la somme et l'intégrale, on a

$$\int_{]0,\infty[} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{]0,\infty[} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{]0,\infty[} f_n(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

Question 4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions intégrables. On définit la *transformée de Fourier* par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x).$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est bien définie.
2. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\, g(x)\, d\lambda(x)$$
(et en particulier que les intégrales sont bien définies).
3. On suppose de plus que f est dérivable et à dérivée f' intégrable.
   (a) Montrer que pour tout intervalle $[a, b]$ fini on a
   $$\int_{[a,b]} f'(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x) = f(x)e^{-ixy}\big|_{x=a}^{x=b} + iy \int_{[a,b]} f(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x).$$
   (b) Montrer que $|f(x)| \to 0$ pour $x \to \pm\infty$.
   [Indication : Utiliser l'intégrabilité de f' pour montrer que f a une limite à $\pm\infty$, et l'intégrabilité de f pour montrer que cette limite vaut 0.]
   (c) En déduire que $\widehat{f'}(y) = iy\hat{f}(y)$.

Solution.

1. La fonction $x \mapsto f(x)e^{-ixy}$ est mesurable pour tout y, et

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ixy}| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x) = \|f\|_1 < \infty.$$

Donc l'intgrale est bien définie.

2. On pose $h(x, y) = f(x)g(y)e^{-ixy}$, une fonction λ_2-mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |h(x,y)|\, d\lambda_2(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |h(x,y)|\, d\lambda(x) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\lambda(x)\, |g(y)|\, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f\|_1\, |g(y)|\, d\lambda(y) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

La fonction h est donc intégrable ; par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{-ixy}\, d\lambda(y) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{-ixy}\, d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y)\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

3.(a) Pour $y \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = e^{-ixy}$, une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Or, $f'g$ et fg' sont mesurables en tant que produit de fonctions mesurables, et

$$|f'g| = |f'|\,|g| = |f'| \qquad \text{et} \qquad |fg'| = |f|\,|g'| = |f|\,|y|.$$

Comme f et f' sont intégrables, $f'g$ et fg' aussi, ainsi que $(fg)'$. On a

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_{[a,b]} (fg)'\, d\lambda = \int_{[a,b]} f'g\, d\lambda + \int_{[a,b]} fg'\, d\lambda.$$

Ainsi

$$\int_{[a,b]} f'(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x) = iy \int_{[a,b]} f(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x) + f(b)e^{-iby} - f(a)e^{-iay}.$$

3.(b) On a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{[0,x]} f'(x)\, d\lambda(x) + f(0) = \int_{[0,\infty[} f'(x)\, d\lambda(x) + f(0)\,;$$

puisque f' est intégrable, cette limite existe dans $\mathbb{R}$. Or, si $|\lim_{x\to\infty} f(x)| \geq \epsilon > 0$, alors $|f(x)| \geq \epsilon/2$ pour x suffisamment grand, et f ne serait pas intégrable. Donc $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. De même, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3.(c) D'après (b), comme $|e^{-ixy}| = 1$ on a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)e^{-ixy} = 0$. Donc (a) avec $a \to -\infty$ et $b \to \infty$ donne

$$\widehat{f'}(y) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x) = iy \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x) = iy\hat{f}(y).$$

Question 5.

1. Montrer que la fonction $e^{-x^2-y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, et que l'on a
$$\int\int e^{-x^2-y^2} d\lambda(x)\, d\lambda(y) = \left(\int e^{-x^2} d\lambda(x)\right)^2.$$
2. Calculer l'intégrale $\int\int e^{-x^2-y^2} d\lambda(x)\, d\lambda(y)$ en utilisant des coordonnées polaires.
3. En déduire la valeur de $\int e^{-x^2} d\lambda(x)$.

Solution.

1. D'après le théorème de Tonelli, comme la fonction est positive et mesurable,
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} d\lambda(x) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) e^{-y^2} d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} d\lambda(y) = \left(\int e^{-x^2} d\lambda(x)\right)^2.\end{aligned}$$
Or, pour $x \geq 0$ on a $0 < e^{-x} \leq \min\{1, \frac{1}{x}\}$ puisque $x \leq e^x$. Donc
$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) \leq 2 + 2\int_{[1,\infty[} \frac{d\lambda(x)}{x^2} = 2 + 2 < \infty.$$
Ainsi e^{-x^2} est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $e^{-x^2-y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.
2. On pose $X =]0,\infty[\times]0,2\pi[$ et $Y = \mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty[\times\{0\}$. Alors $(r,t) \mapsto (x,y) = (r\cos t, r\sin t)$ est un C^1-difféomorphisme entre X et Y. On a
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos t, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -r\sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin t \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = r\cos t.$$
Ainsi $|\det J| = r(\cos^2 t + \sin^2 t) = r$, et $x^2 + y^2 = r^2$. Puisque $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ est négligeable, le théorème de changement de variable (plus Tonelli) donne
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\lambda_2(x,y) &= \int_Y e^{-x^2-y^2} d\lambda_2(x,y) = \int_X e^{-r^2} r\, d\lambda_2(r,t)\\ &= \int_{]0,\infty[}\int_{]0,2\pi[} e^{-r^2} r d\lambda(t) d\lambda(r)\\ &= \int_{]0,\infty[} 2\pi e^{-r^2} r d\lambda(r) = -\pi e^{-r^2}|_0^\infty = \pi.\end{aligned}$$
3. Donc $\int e^{-x^2} d\lambda(x) = \sqrt{\pi}$.