Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

Examen Final

4 janvier 2016 — durée 3 h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Sujet en **recto-verso**.

Question 1. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe une suite $(A_n : n \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$. On pose $F = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

1. Justifier que $F \in \mathcal{T}$. Montrer que $x \in X$ appartient à F si et seulement si $x \in A_n$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\mu(F) = 0$.
3. On considère une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, et on suppose que pour tout $\epsilon > 0$ on a
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \infty.$$

En déduire que f_n converge μ-presque partout vers f (c'est-à-dire l'ensemble des $x \in X$ tel que $f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$ est μ-négligeable).

Par la suite on note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Question 2. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $f :]0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction borélienne. On pose
$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(x\, f(t))}{1+t^2} d\lambda(t).$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer la limite de F en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite lorsque $f(t) > 0$ pour λ-presque tout $t \in]0, \infty[$?
3. Vérifiér que pour tous $u, v \geq 0$ on a
$$\frac{2uv}{1+u^2v^2} \leq 1.$$

   Montrer que F est de classe C^1 sur l'ouvert $]0, \infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

Question 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose pour $x > 0$

$$f(x) = \frac{x\, e^{-ax}}{1 - e^{-bx}}.$$

Montrer que

$$\int_{]0,\infty[} f(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

Question 4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions intégrables. On définit la *transformée de Fourier* par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x).$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est bien définie.
2. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\, g(x)\, d\lambda(x)$$
(et en particulier que les intégrales sont bien définies).
3. On suppose de plus que f est dérivable et à dérivée f' intégrable.
   (a) Montrer que pour tout intervalle $[a, b]$ fini on a
   $$\int_{[a,b]} f'(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x) = f(x) e^{-ixy}|_{x=a}^{x=b} + iy \int_{[a,b]} f(x)\, e^{-ixy} d\lambda(x).$$
   (b) Montrer que $|f(x)| \to 0$ pour $x \to \pm\infty$.
   [Indication : Utiliser l'intégrabilité de f' pour montrer que f a une limite à $\pm\infty$, et l'intégrabilité de f pour montrer que cette limite vaut 0.]
   (c) En déduire que $\widehat{f'}(y) = iy\hat{f}(y)$.

Question 5.

1. Montrer que la fonction $e^{-x^2-y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, et que l'on a
$$\int \int e^{-x^2-y^2} d\lambda(x)\, d\lambda(y) = \left(\int e^{-x^2} d\lambda(x) \right)^2.$$
2. Calculer l'intégrale $\int \int e^{-x^2-y^2} d\lambda(x)\, d\lambda(y)$ en utilisant des coordonnées polaires.
3. En déduire la valeur de $\int e^{-x^2} d\lambda(x)$.