Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

Examen Final

6 janvier 2015 — durée 3 h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Sujet en **recto-verso**.

Question 1. Soit X un ensemble, $\mathcal{T}$ un clan sur X et μ une mesure sur $\mathcal{T}$. Soit

$$\mu^* : A \mapsto \inf \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : (A_n)_n \subset \mathcal{T},\ A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big\}$$

la mesure extérieure associée, et $\bar{\mathcal{T}}$ la tribu des parties A de X qui sont μ^*-mesurables, c'est-à-dire

$$\mu^*(B) = \mu^*(B\cap A) + \mu^*(B \setminus A) \text{ pour tout } B \subseteq X. \qquad (\dagger)$$

1. Pour $E \subseteq X$ on pose $\mu^*_E(A) = \mu^*(A\cap E)$ pour tout $A \subseteq X$. Montrer que pour toute suite $(A_n)_n$ de parties de X on a
$$\mu^*_E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*_E(A_n).$$
2. Montrer que tout $A \in \bar{\mathcal{T}}$ est μ^*_E-mesurables, c'est-à-dire satisfait (†) avec μ^*_E.
3. Soit $E \subseteq X$ fixé. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ des ensembles du type $(A\cap E)\cup(A'\setminus E)$, avec $(A, A') \in \bar{\mathcal{T}}^2$, est une tribu contenant $\mathcal{T}$ et E.
4. On définit $m : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ en posant $m((A\cap E)\cup(A'\setminus E)) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A'\setminus E)$. Montrer que m est bien définie, et que tout $A \in \mathcal{B}$ est m-mesurable.

Question 2. Soient λ la mesure de Lebesgue, δ_x la mesure de Dirac concentré au point x (c'est-à-dire $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$, et $\delta_x(A) = 0$ sinon), et $\mu = \delta_1 + 2\delta_2$. On note $\nu = \lambda \otimes \mu$ et

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

1. Le théorème de Fubini, est-il applicable à la fonction f et la mesure ν sur $\mathbb{R}^2$? (Justifier la réponse.)
2. Calculer l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}\nu.$$

Question 3. Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre. Soit $(r_n : n > 0)$ une suite de points distincts dans l'intervalle $[0,1]$. On considère la fonction $\Phi : [0,1] \to [0,\infty]$ définie par

$$\Phi(x) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^2|x-r_n|^\alpha} \qquad \text{avec la convention que } \frac{1}{0} = \infty.$$

1. Montrer que pour $r \in [0,1]$, la fonction $|x-r|^{-\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur l'intervalle $[0,1]$, et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-r|^\alpha} \,\mathrm{d}\lambda(x) \leq C$$

   pour tout $r \in [0,1]$.
2. En déduire que

$$\int_0^1 \Phi(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty.$$

3. En déduire que $\Phi(x) < \infty$ pour λ-presque tout x.
4. Montrer que pour tout $n > 0$ on a $\lim_{x\to r_n} \Phi(x) = \infty$.

Question 4. Supposons que $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ est une fonction non-negative et Borel mesurable satisfaisant à la condition

$$\int_{\mathbb{R}^{\geq 0}} e^t f(t)\, d\lambda(t) < \infty. \tag{(C)}$$

On étudie la fonction $J_f :]-\infty, 1] \to [0, \infty[$ définie par l'intégrale de Lebesgue

$$J_f(x) = \int_{\mathbb{R}^{\geq 0}} e^{xt} f(t) \,\mathrm{d}\lambda(t).$$

1. Montrer les faits suivants :
   (a) La fonction J_f est à valeurs finies et continue sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.
   (b) Pour tout nombre donné $\delta > 0$, il existe une constante $C_\delta > 0$ dépendante de δ telle que pour tout $t \geq 0$

$$t + t^2 \leq C_\delta e^{\delta t}.$$

   En déduire $(t+t^2)e^{xt} \leq C_\delta e^t$ pour tout $x \leq 1-\delta$ et $t \geq 0$.
   (c) La fonction J_f est deux fois dérivable dans l'intervalle $]-\infty, 1[$, et $J_f'(x) \geq 0$ et $J_f''(x) \geq 0$ pour tout $x < 1$.
2. Considérons dans la suite le cas particulier où

$$f(t) = h(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^2}.$$

   (a) Montrer que h vérifie la condition (C).
   (b) Montrer que la fonction J_h satisfait à l'équation différentielle

$$J_h''(x) + J_h(x) = \frac{1}{1-x}.$$