Mesure et Intégration
Examen Final – Corrigé
13 janvier 2014 — durée 3 h

Notations

(a) λ_n est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions boréliennes et λ_n-intégrables dans $\mathbb{R}^n$.

Question 1.

1. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2.$$
[Indication : Calculer l'intégrale en coordonnées polaires, en faisant le changement de variables $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$ que l'on justifiera.]

2. En déduire la valeur de
$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solution. Les fonctions sont continues, donc mesurables.

1. Le changement de variables $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$ est C^1 de $]0,\infty[\times]0,2\pi[$ vers $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty[\times\{0\})$. On a
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos t, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -r\sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin t \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = r\cos t.$$
Donc $|\det J| = r(\cos^2 t + \sin^2 t) = r$, et $x^2+y^2 = r^2$. Ainsi
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus([0,\infty[\times\{0\})} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} e^{-r^2} r\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \int_{]0,\infty[}\int_{[0,2\pi[} e^{-r^2} r\mathrm{d}t\mathrm{d}r = \int_{]0,\infty[} 2\pi e^{-r^2} r\mathrm{d}r = [-\pi e^{-r^2}]_0^\infty = \pi,\end{aligned}$$
où la première égalité est puisque $[0,\infty[\times\{0\}$ est négligeable, la deuxième d'après le théorème de changement de variable, et la troisième d'après le théorème de Tonelli.

2. D'après le théorème de Fubini (ou Tonelli), comme $e^{-x^2-y^2}$ est intégrable positive, on a
$$\pi = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\Big)^2.$$
De plus, e^{-x^2} est une fonction paire, d'où $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$, et $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Question 2. Pour $n > 0$ entier et s réel, on pose $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\chi_{]0,\infty[}(x)$. On rappelle la définition de la fonction d'Euler : $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y$ pour $s > 0$, et de la fonction ζ, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ pour $s > 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty} g_n\,\mathrm{d}\lambda$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x = \Gamma(s)\,\zeta(s)$ pour tout $s > 1$.
3. En déduire aussi que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x = \infty$ pour tout $s \in]0,1]$.

Solution. Les fonctions sont continues, donc mesurables.

1. Les g_n sont des fonctions positives. On pose $f_k = \sum_{n=1}^{n} g_n$. Alors (f_k) est une suite croissante de fonctions positives ; d'après le théorème de convergence monotone on a
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} g_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{k} g_n\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}}\lim_{k\to\infty} f_k\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty} g_n\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$
2. Avec le changement de variables $y = nx$ et $\mathrm{d}y = n\,\mathrm{d}x$ on a pour $s > 1$
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n\,\mathrm{d}\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,\mathrm{d}x = g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty n^{-s+1}(nx)^{s-1}e^{-nx}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty n^{-s}y^{s-1}e^{y}\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\Gamma(s) = \Gamma(s)\,\zeta(s).\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty} g_n\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty\sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-x})^n\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x.$$
On conclut avec la partie 1.
3. D'après les parties 1. et 2; on a pour $s > 0$
$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} n^{-s}\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} n^{-s}\Gamma(s).$$
Puisque $y \mapsto y^{s-1}e^{-y}$ est une fonction strictement positive et continue sur $]0,\infty[$, on a $\Gamma(s) > 0$. Comme $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} n^{-s} = \infty$, on conclut.

Question 3.

1. Démontrer que pour tout réel z on a $1 - e^{-z} \leq z$.

2. Pour tout $y \geq 0$, démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable sur $]0, \infty[$.

   Pour $y \geq 0$ on pose $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} \, \mathrm{d}x$.

3. Calculer (sans utiliser la suite de l'exercice) $\displaystyle\lim_{y \to \infty} \frac{F(y)}{y}$.
   [Indication : utiliser le théorème de convergence dominée.]

4. Démontrer que F est continue sur $[0, \infty[$ et dérivable sur $]0, \infty[$. Exprimer sa dérivée en fonction de l'intégrale I de la question 1.

5. Calculer F.

Solution. Soit $f(x, y) = \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$.

1. Soit $g(z) = z + e^{-z}$. Alors $g'(z) = 1 - e^{-z}$, et $g'(z)$ est positif pour $z > 0$ et négatif pour $z < 0$. Donc $g(z) \geq g(0) = 1$, d'où $1 - e^{-z} \leq z$.

2. La fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue, donc mesurable. On a $0 < f(x, y) \leq \frac{x^2 y}{x^2} = y$ et $0 < f(x, y) \leq \frac{1}{x^2}$; la fonction est ainsi intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, \infty[$, et donc sur $]0, \infty[$.

3. Pour $y \geq 1$ on a $|\frac{f(x,y)}{y}| \leq \min\{1, \frac{1}{x^2}\}$, et cette dernière fonction est intégrable. De plus, $0 \leq \lim_{y \to \infty} \frac{f(x,y)}{y} \leq \lim_{y \to \infty} \frac{1}{x^2 y} = 0$ pour $x > 0$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{y \to \infty} \frac{F(y)}{y} = \lim_{y \to \infty} \int_0^\infty \frac{f(x, y)}{y} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{y \to \infty} \frac{f(x, y)}{y} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty 0 \, \mathrm{d}x = 0.$$

4. La fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $[0, \infty[$ pour tout $x > 0$, et pour tout $r > 0$ on a que $|f(x, y)| \leq \min\{r, \frac{1}{x^2}\}$ pour $y \in [0, r]$. D'après un théorème du cours, F est continue sur $[0, r]$, pour tout $r > 0$. Donc F est continue sur $[0, \infty[$.

   De plus, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-x^2 y}$ pour tout $x \in]0, \infty[$, et pour tout $r > 0$ on a que $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| = |e^{-x^2 y}| \leq e^{-x^2 r}$ pour tout $y \in [r, \infty[$. D'après un théorème du cours, F est dérivable sur $[r, \infty[$ pour tout $r > 0$, et donc sur $]0, \infty[$, avec (où $z = x\sqrt{y}$ et $\mathrm{d}z = \sqrt{y} \, \mathrm{d}x$)

$$F'(y) = \int_0^\infty e^{-x^2 y} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{y}} \mathrm{d}z = \frac{I}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}.$$

5. On a $F(0) = 0$ et donc

$$F(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^y F'(z) \, \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^y \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}} \, \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} (\sqrt{y\pi} - \sqrt{\varepsilon\pi}) = \sqrt{y\pi}.$$

Question 4. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et $F(x, y) = f(x-y)\, g(y)$.

1. Montrer que pour λ_n–presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto F(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que le produit de convolution de f et g défini λ_n-presque partout par
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\, \mathrm{d}y,$$
vérifie $f * g = g * f$ λ_n-presque partout.
3. Montrer que
$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$
[Indication : Utiliser le théorème de Fubini-Tonnelli pour montrer que $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$, et conclure.]

Solution.

1. F est mesurable ; d'après le théorème de Tonelli,
$$\begin{aligned}\|F\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |F(x, y)|\, \mathrm{d}\lambda_{2n} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, \mathrm{d}x\big)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|\, \mathrm{d}z\big)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, \|f\|_1\, \mathrm{d}y = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty,\end{aligned}$$
avec le changement de variable $z = x - y$ et $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$. Donc F est intégrable. D'après le théorème de Fubini, $y \mapsto F(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ pour λ_n–presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Pour λ_n–presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, g(x-z)\, \mathrm{d}z = (g * f)(x)$$
avec le changement de variables $z = x - y$ et $\mathrm{d}z = |(-1)^n|\, \mathrm{d}y = \mathrm{d}y$.
3. D'après la preuve de 1., F est intégrable et $\|F\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Alors
$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\, \mathrm{d}y\Big|\, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Question 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

1. Montrer que
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y \neq \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$$
[Indication : On trouve la primitive de $1/(1+t^2)^2$ en intégrant par parties $1/(1+t^2)$.]

2. Pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $S_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, calculer
$$\int_{S_\varepsilon} |f|\,\mathrm{d}\lambda_2.$$
[Indication : Utiliser les coordonnées polaires.]

3. En déduire que la partie 1. n'est pas en contradiction avec le théorème de Fubini-Tonnelli.

Solution.

1.
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{-2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = [-2\arctan y]_{-1}^{1} = -\pi,$$
comme $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[-1,1]$ pour $y \neq 0$. De même,
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}y = [2\arctan y]_{-1}^{1} = \pi.$$
Puisque $\pi \neq -\pi$, le resultat en découle.

2. On pose $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Ceci définit un C^1-difféomorphisme entre $[\sqrt{\varepsilon}, 1] \times [0, 2\pi[$ et S_ε avec $|\det J| = r$. Donc (où l'on utilise le théorème de Tonelli pour la troisième égalité)
$$\begin{aligned}\int_{S_\varepsilon} |f|\,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[\sqrt{\varepsilon},1]\times[0,2\pi[} |f(r\cos t, r\sin t)|\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{[\sqrt{\varepsilon},1]\times[0,2\pi[} \left|\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{r^2}\right| r\,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \int_{[\sqrt{\varepsilon},1]} r^{-1}\,\mathrm{d}r \int_{[0,2\pi[} |\cos(2t)|\,\mathrm{d}t = [\ln r]_{\sqrt{\varepsilon}}^{1}\, 4 = -4\ln\sqrt{\varepsilon},\end{aligned}$$
puisque par symétrie
$$\int_{[0,2\pi[} |\cos(2t)|\,\mathrm{d}t = 8\int_{[0,\pi/4[} \cos(2t)\,\mathrm{d}t = 4\,[\sin(2t)]_0^{\pi/4} = 4.$$

3. D'après 2., $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} |f|\,\mathrm{d}\lambda_2 = \infty$. Ainsi $\|f\|_1 = \infty$ et $f \notin \mathcal{L}^1(B(0,1))$, donc $f \notin \mathcal{L}^1([-1,1]^2)$. Comme l'intégrabitité de f est une des hypothèses du théorème de Fubini, celui-ci ne s'applique pas.