Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

Examen Final

6 janvier 2015 — durée 3 h

**Corrigé**

**Question 1.** Soit $X$ un ensemble, $\mathcal{T}$ un clan sur $X$ et $\mu$ une mesure sur $\mathcal{T}$. Soit

$$\mu^* : A \mapsto \inf \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : (A_n)_n \subset \mathcal{T},\ A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big\}$$

la mesure extérieure associée, et $\bar{\mathcal{T}}$ la tribu des parties $A$ de $X$ qui sont $\mu^*$-mesurables, c'est-à-dire

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \text{ pour tout } B \subseteq X. \tag{†}$$

1. Pour $E \subseteq X$ on pose $\mu^*_E(A) = \mu^*(A \cap E)$ pour tout $A \subseteq X$. Montrer que pour toute suite $(A_n)_n$ de parties de $X$ on a
$$\mu^*_E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*_E(A_n).$$
2. Montrer que tout $A \in \bar{\mathcal{T}}$ est $\mu^*_E$-mesurables, c'est-à-dire satisfait (†) avec $\mu^*_E$.
3. Soit $E \subseteq X$ fixé. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ des ensembles du type $(A \cap E) \cup (A' \setminus E)$, avec $(A, A') \in \bar{\mathcal{T}}^2$, est une tribu contenant $\mathcal{T}$ et $E$.
4. On définit $m : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ en posant $m((A \cap E) \cup (A' \setminus E)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A' \setminus E)$. Montrer que $m$ est bien définie, et que tout $A \in \mathcal{B}$ est $m$-mesurable.

**Solution.**

1. Puisque $\mu^*$ est une mesure extérieure, elle est sous-additive. Ainsi
$$\mu^*_E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu^*((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap E) = \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap E)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n \cap E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*_E(A_n).$$
2. Soit $B \subseteq X$. Alors $B \cap E \subseteq X$ ; puisque $A \in \bar{\mathcal{T}}$, on a (†) avec $B \cap E$ à la place de $B$. Ainsi
$$\begin{aligned} \mu^*_E(B) = \mu^*(B \cap E) &= \mu^*((B \cap E) \cap A) + \mu^*((B \cap E) \setminus A) \\ &= \mu^*((B \cap A) \cap E) + \mu^*((B \setminus A) \cap E) = \mu^*_E(B \cap A) + \mu^*_E(B \setminus A). \end{aligned}$$
3. Si $A \in \mathcal{T} \subseteq \bar{\mathcal{T}}$, alors $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$, et $A \in \mathcal{B}$. Ainsi $\bar{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{B}$. De plus, $(X, \emptyset) \in \bar{\mathcal{T}}^2$, et
$$E = (X \cap E) \cup (\emptyset \setminus E) \in \mathcal{B}.$$
Si $(A, A') \in \bar{\mathcal{T}}^2$, alors $(X \setminus A, X \setminus A') \in \bar{\mathcal{T}}^2$, et
$$X \setminus [(A \cap E) \cup (A' \setminus E)] = ((X \setminus A) \cap E) \cup ((X \setminus A') \setminus E) \in \mathcal{B}.$$
Si $(A_n, A'_n) \in \bar{\mathcal{T}}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n) \in \bar{\mathcal{T}}^2$, et
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap E) \cup (A'_n \setminus E) = ((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap E) \cup ((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n) \setminus E) \in \mathcal{B}.$$

4. Soient $(A, A') \in \bar{\mathcal{T}}^2$ et $B = (A \cap E) \cup (A' \setminus E)$. Alors $A \cap E = B \cap E$ et $A' \setminus E = B \setminus E$. Ainsi
$$m(B) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A' \setminus E) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E)$$
ne dépend pas du choix de $(A, A')$. De plus, pour $C \subseteq X$, on a d'après 2.
$$\begin{aligned} m(C) &= \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C \setminus E) = \mu_E^*(C) + \mu_{X\setminus E}^*(C) \\ &= \mu_E^*(C \cap A) + \mu_E^*(C \setminus A) + \mu_{X\setminus E}^*(C \cap A') + \mu_{X\setminus E}^*(C \setminus A') \\ &= \mu_E^*(C \cap B) + \mu_E^*(C \setminus B) + \mu_{X\setminus E}^*(C \cap B) + \mu_{X\setminus E}^*(C \setminus B) \\ &= m(C \cap B) + m(C \setminus B). \end{aligned}$$

**Question 2.** Soient $\lambda$ la mesure de Lebesgue, $\delta_x$ la mesure de Dirac concentré au point $x$ (c'est-à-dire $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$, et $\delta_x(A) = 0$ sinon), et $\mu = \delta_1 + 2\delta_2$. On note $\nu = \lambda \otimes \mu$ et
$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

1. Le théorème de Fubini, est-il applicable à la fonction $f$ et la mesure $\nu$ sur $\mathbb{R}^2$ ? (Justifier la réponse.)
2. Calculer l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}\nu.$$

**Solution.**

1. D'après le théorème de Fubini-Tonelli pour les fonctions mesurables positives,
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f|\,\mathrm{d}\nu &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x,1) + 2\,f(x,2)|\,\mathrm{d}\lambda(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{x^2 + 1^2 + 1} + 2\frac{2}{x^2 + 2^2 + 1} \right) \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} \right]_{|\infty}^{\infty} = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{5}})\,\pi < \infty. \end{aligned}$$
Ainsi $f$ est $\nu$-intégrable, et le théorème de Fubini s'applique.
2. Il donne
$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x,1) + 2\,f(x,2))\,\mathrm{d}\lambda(x) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{5}})\,\pi.$$

**Question 3.** Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre. Soit $(r_n : n > 0)$ une suite de points distincts dans l'intervalle $[0, 1]$. On considère la fonction $\Phi : [0, 1] \to [0, \infty]$ définie par
$$\Phi(x) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^2 |x - r_n|^\alpha} \qquad \text{avec la convention que } \frac{1}{0} = \infty.$$

1. Montrer que pour $r \in [0, 1]$, la fonction $|x - r|^{-\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$, et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\int_0^1 \frac{1}{|x - r|^\alpha}\,\mathrm{d}\lambda(x) \leq C$$
pour tout $r \in [0, 1]$.

2. En déduire que
$$\int_0^1 \Phi(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty.$$
3. En déduire que $\Phi(x) < \infty$ pour $\lambda$-presque tout $x$.
4. Montrer que pour tout $n > 0$ on a $\lim_{x\to r_n} \Phi(x) = \infty$.

**Solution.**

1. La fonction $f$ est continue sur $[0,1] \setminus \{r\}$. Si $0 < \epsilon < r$, alors
$$\int_0^{r-\epsilon} \frac{1}{|x-r|^\alpha}\,\mathrm{d}\lambda = [-\frac{(r-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_0^{r-\epsilon} = \frac{r^{1-\alpha}-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le \frac{1}{1-\alpha}.$$
Si $0 < \epsilon < 1-r$, alors
$$\int_{r+\epsilon}^1 \frac{1}{|x-r|^\alpha}\,\mathrm{d}\lambda = [\frac{(x-r)^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_{r+\epsilon}^1 = \frac{(1-r)^{1-\alpha}-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le \frac{1}{1-\alpha}.$$
Ainsi $\int_0^1 |x-r|^{-\alpha}\,\mathrm{d}\lambda \le \frac{2}{1-\alpha}$, et on peut prendre $C = \frac{2}{1-\alpha}$.
2. Comme intégration et sommation commutent pour les fonctions positives mesurables,
$$\int_0^1 \Phi(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \sum_{n>0} \frac{|x-r|^{-\alpha}}{n^2}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n>0} \frac{1}{n^2}\int_0^1 |x-r|^{-\alpha}\,\mathrm{d}\lambda \le C\sum_{n>0}\frac{1}{n^2} = \frac{C}{6}\pi^2 < \infty.$$
3. Pour toute fonction mesurable positive $f$ (ou Lebesgue inégrable), $\int f < \infty$ implique $f < \infty$ presque partout. Comme $\Phi$ est mesurable positive, on a $\Phi < \infty$ $\lambda$-presque partout.
4. Pour $n > 0$ on a $\lim_{x\to r_n} \Phi(x) \ge \lim_{x\to r_n} \frac{1}{n^2\,|x-r_n|^\alpha} = \infty$.

**Question 4.** Supposons que $f : \mathbb{R}^{\ge 0} \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ est une fonction non-negative et Borel mesurable satisfaisant à la condition
$$\int_{\mathbb{R}^{\ge 0}} e^t\, f(t)\, d\lambda(t) < \infty. \tag{C}$$
On étudie la fonction $J_f : ]-\infty, 1] \to [0, \infty[$ définie par l'intégrale de Lebesgue
$$J_f(x) = \int_{\mathbb{R}^{\ge 0}} e^{xt}\, f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

1. Montrer les faits suivants :
   (a) La fonction $J_f$ est à valeurs finies et continue sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.
   (b) Pour tout nombre donné $\delta > 0$, il existe une constante $C_\delta > 0$ dépendante de $\delta$ telle que pour tout $t \ge 0$
   $$t + t^2 \le C_\delta e^{\delta t}.$$
   En déduire $(t+t^2)e^{xt} \le C_\delta e^t$ pour tout $x \le 1-\delta$ et $t \ge 0$.
   (c) La fonction $J_f$ est deux fois dérivable dans l'intervalle $]-\infty, 1[$, et $J_f'(x) \ge 0$ et $J_f''(x) \ge 0$ pour tout $x < 1$.
2. Considérons dans la suite le cas particulier où
$$f(t) = h(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^2}.$$
   (a) Montrer que $h$ vérifie la condition (C).

(b) Montrer que la fonction $J_h$ satisfait à l'équation différentielle

$$J_h''(x) + J_h(x) = \frac{1}{1-x}.$$

**Solution.**

1. (a) Pour $x \leq 1$ et $t \geq 0$ on a $e^{xt} \leq e^t$. Par monotonie de l'intégrale,

$$J_f(x) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{xt} f(t) \, d\lambda(t) \leq \int e^t f(t) \, d\lambda(t) < \infty.$$

De plus, $|e^{xt} f(t)| \leq e^t f(t)$ pour tout $x \leq 1$, la première fonction est continue en $x$ et la deuxième est intégrable en $t$. Donc $J_f(x)$ est continue.

(b) Soit $C_\delta = \max\{\delta^{-1}, 2\delta^{-2}\} > 0$. Alors pour $t \geq 0$ on a

$$C_\delta e^{\delta t} = C_\delta \sum_{n>0} \frac{(\delta t)^n}{n!} \geq (t + t^2).$$

Pour $t \geq 0$ on a

$$(t + t^2) e^{xt} \leq (t + t^2) e^{(1-\delta)t} \leq C_\delta e^{\delta t} e^{(1-\delta)t} = C_\delta e^t.$$

(c) Pour tout $\delta > 0$, tout $x \leq 1 - \delta$ et $t \geq 0$ on a

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial x}(e^{xt} f(t)) = t e^{xt} f(t) \leq C_\delta e^t f(t)$$

et

$$0 \leq \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{xt} f(t)) = t^2 e^{xt} f(t) \leq C_\delta e^t f(t).$$

Comme les dérivées sont positives et bornées par une fonction intégrable pour $x \leq 1 - \delta$, on peut dériver sous l'intégrale. Ainsi

$$J_f'(x) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{\partial}{\partial x}(e^{xt} f(t)) \, \mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t e^{xt} f(t) \, \mathrm{d}\lambda(t) \geq 0$$

et

$$J_f''(x) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{xt} f(t)) \, \mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^2 e^{xt} f(t) \, \mathrm{d}\lambda(t) \geq 0.$$

L'énoncé en découle.

2. (a)

$$\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^t h(t) \, \mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^t \frac{e^{-t}}{1+t^2} \, \mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}\lambda(t) = [\arctan t]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Pour $\delta > 0$ et $x \leq 1 - \delta$ on a

$$\begin{aligned} J_h''(x) + J_h(x) &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^2 e^{xt} \frac{e^{-t}}{1+t^2} \, \mathrm{d}\lambda(t) + = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{xt} \frac{e^{-t}}{1+t^2} \, \mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{(t^2+1)\, e^{(x-1)t}}{1+t^2} \, \mathrm{d}\lambda(t) = \left[\frac{e^{(x-1)t}}{x-1}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$