Université Claude-Bernard Lyon 1
L3 MASS

Novembre 2013

La méthode de Jacobi

1 La méthode

On veut résoudre un système linéaire $AX = B$ de n équations à n inconnues avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Les méthodes directes fournissent la solution $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ en un nombre fini d'opérations. Si la taille du système est élevée le nombre d'opérations est important. Or les erreurs de calculs dépendent directement du nombre de calculs et le résultat calculé par une méthode directe peut alors s'avérer éloigné de la solution exacte.

Le but des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs $\bar{x}^{(k)}$ pour $k = 0, 1, 2$, etc, qui tend vers la solution exacte $\bar{x}$. Le point de départ est une approximation $\bar{x}^{(0)}$ de $\bar{x}$ obtenue par exemple par une méthode directe.

2 Un Exemple

On considère le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ la solution exacte du système. Chaque coordonnée x_i peut s'exprimer en fonction des autres. Avec la premiére ligne on calcule x_1, avec la deuxième x_2 etc. Pour l'exemple on obtient :

la ligne 1 donne $x_1 = -x_2$

la ligne 2 donne $x_2 = -1 - x_1 + x_3$

la ligne 3 donne $x_3 = 2 - x_2$.

Si nous ne connaissons pas la solution mais que nous avons une valeur approchée $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ alors il est possible de construire une suite de nouvelles approximations en utilisant les équations définies à l'étape précédente. À chaque itération on se rapproche de la solution exacte.

La première itération est

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -x_2^{(0)}\\
x_2^{(1)} &= -1 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}\\
x_3^{(1)} &= 2 - x_2^{(0)}.
\end{aligned}
$$

La méthode de Jacobi consiste à itérer tant que l'on n'est pas assez proche de la solution. On calcule une nouvelle approximation

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -x_2^{(1)}\\
x_2^{(2)} &= -1 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)}\\
x_3^{(2)} &= 2 - x_2^{(1)}.
\end{aligned}
$$

puis $(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})$ ...

Mais il existe des conditions pour que cette itération converge.

Définition 1. *Une matrice* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *est dite à diagonale strictement dominante si* $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|$.

Théorème 1. *Si* A *est une matrice à diagonale strictement dominante alors la méthode de Jacobi est convergente quel que soit le vecteur initial.*

3 Travail demandé

Nous considérons le système linéaire $AX = B$ où A est une matrice de taille n.

Nous notons $\bar{x}^{(0)}$ le vecteur initial.

Nous estimons avoir la solution lorsque nous avons calculé un vecteur $\bar{x}^{(k)}$ tel que $A\bar{x}^{(k)}$ est assez proche de B i.e tel que $||A\bar{x}^{(k)} - B|| \leq \varepsilon$ pour un ε donné au départ.

1. La solution exacte de l'exemple est $(-1, 1, 1)$. Faites tourner l'exemple en partant du vecteur $(-0.5, 1, 1)$.
2. Déclarer une classe Jacobi avec les attributs nécessaires : une matrice A de réels, un vecteur B de réels, un réel ε et un vecteur de réels X.
3. Écrire un constructeur et une méthode qui permet d'afficher les attributs.
4. Écrire une méthode qui indique si la matrice est à diagonale strictement dominante.
5. Pour un tableau de réels t donné en paramètre écrire une méthode qui indique si $||At - B|| \leq \varepsilon$.
6. Écrire une méthode Jacobi qui retourne une solution approchée du système.