Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n° 2

SYSTÈMES LINÉAIRES BIEN POSÉS

Exercice 1. *Décomposition LU.*

Écrire un algorithme de décomposition LU par identification. Compter le nombre d'opérations.

Exercice 2. *Un exemple de décomposition LU.* On définit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la factorisation LU de A.
2. En déduire la valeur du déterminant de A.
3. En utilisant la décomposition LU de A, résoudre le système $Ax = b$ pour les valeurs suivantes du vecteur $b \in \mathbf{R}^4$

(a) $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$; (b) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; (c) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; (d) $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Pour les deux derniers cas, comment lit-on sur la matrice que la solution est triviale ?

Exercice 3. *Décomposition QR par la méthode de Householder.*

Le but de cet exercice est d'obtenir la décomposition $A = QR$ par une méthode plus efficace et plus stable que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt vu en cours : l'algorithme de Householder. Il consiste à multiplier la matrice A de départ par une suite de matrices orthogonales très simples pour obtenir une matrice triangulaire supérieure. C'est l'algorithme utilisé en pratique.

Notations.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dans la suite, les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ sont identifiés à des vecteurs colonnes et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Ainsi, pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $\|u\|^2 = u^T u$.

1. À tout vecteur $u \in \mathbf{R}^n$ on associe la matrice de Householder définie par

$$H(u) = \begin{cases} \mathrm{I}_n - 2\dfrac{uu^T}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ \mathrm{I}_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $H(u)$ est symétrique et othogonale.

$H(u)$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à u. Faire un dessin.

(b) Soit e un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$.

Montrer que, pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, si v et e ne sont pas co-linéaires, alors

$$H(v + \|v\| e)\, v = -\|v\|\, e \qquad \text{et} \qquad H(v - \|v\| e)\, v = \|v\|\, e.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   (a) Déterminer une matrice de Householder H telle que la matrice HA n'ait que des zéros sous la diagonale dans sa première colonne.

   (b) Construire une suite de matrices de Householder $(H^{(k)})_{1 \le k \le n}$ et une suite de matrices $(A^{(k)})_{1 \le k \le n+1}$ telles que

   (i). $A^{(1)} = A$;

   (ii). pour tout $1 \le k \le n$, $A^{(k+1)} = H^{(k)} A^{(k)}$;

   (iii). $A^{(n+1)}$ est triangulaire.

   (c) Montrer que l'algorithme précédent fournit une décomposition QR et que le nombre N_{op} de multiplications nécessaires à sa mise en œuvre vérifie $N_{op} \sim \dfrac{2n^3}{3}$.

Exercice 4. *Convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.* Examiner la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Une comparaison des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.* Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.

   On pourra commencer par obtenir une valeur propre évidente en remarquant que la somme des éléments de chaque ligne de A est la même.

2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle symétrique définie positive ?

3. Écrire la matrice J de l'itération de Jacobi.

   Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?

4. Écrire la matrice $\mathcal{L}_1$ de l'itération de Gauss-Seidel.

5. Pour quelles valeurs positives ou nulles de a la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?

6. Pour $a \in]0, \frac{1}{2}[$, comparer les vitesses de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.