Correction : DS n°2

Exercice 1 (6 pts)

1) $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad sp(A) = \{10; 1\}$ module $\neq$.

$X_{k+1} = \dfrac{AX_k}{\|AX_k\|}$ ou bien $X_{k+1} = \dfrac{A^k X_0}{\|A^k X_0\|}$

$X_1 = \dfrac{\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{101}}$; $X_2 = \dfrac{\begin{pmatrix} 10^2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10^4+1}}$; $X_3 = \dfrac{\begin{pmatrix} 10^3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10^6+1}}$; $X_4 = \dfrac{\begin{pmatrix} 10^4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10^8+1}}$; $X_5 = \dfrac{\begin{pmatrix} 10^5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10^{10}+1}}$

$\rho_{(5)}(A) \simeq \langle X_5, AX_5 \rangle = \dfrac{10^{11}+1}{10^{10}+1}$ 2 pts

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad sp(A) = \{3; 2\}$ module $\neq$

$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ on a $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 pts

$\rho_{(5)}(A) \simeq \langle X_5, AX_5 \rangle = 2$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad sp(A) = \{i; -i\}$ de même module.

$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 pts

$\rho_{(5)}(A) \simeq 1$

Exercice 2 (5 pts)

$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\rho = \frac{1}{2}$

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$ et $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

points critiques :

$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point critique de f

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrice réelle, symétique avec deux valeurs propres de signe opposé alors $(0,0)$ n'est pas un minimum local.

méthode du gradient : $X_{k+1} = X_k - \rho \nabla f(X_k)$ 2,5 pts

$\Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 = 2$ et $\rho = \frac{1}{24}$

$\quad x \to (x^2-1)^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4(x)(x^2-1) = 0 \quad x = 0$ ou $x = \pm 1$

points critiques sont $\{0; 1; -1\}$

$f''(x) = 4(3x^2-1)$

- en 0 $f''(0) = -4 < 0$ donc $x = 0$ n'est pas un minimum local

2,5 pts

- en 1 $f''(1) = 8 > 0$
- en -1 $f''(-1) = 8 > 0$

$\Big\}$ 1 et -1 sont des minima locaux.

méthode du gradient

$X_{k+1} = X_k - \rho f'(X_k) \Rightarrow X_1 = 1$; $X_2 = 1$; $X_3 = 1$

Exercice 3 (1,5 pts)

Par dichotomie on sait qu'avec N pas on localise au moins un zéro d'une fonction avec une précision de $2^{-N} e_0$ où e_0 est l'erreur initiale.

Ainsi $e_{n_0} = 2^{-n_0} e_0$ Pour que $e_{n_0} \leq 2^{-6}$ il faut

$2^{-n_0} e_0 \leq 2^{-6}$ donc il suffit $2^{-n_0} \leq 2^{-8}$ car $e_0 \leq 4$

d'où $\boxed{n_0 \geq 8}$ 1,5 pts

Exercice 4 (7,5 pts)

1) La proposition est fausse car si $a = 1$ tout point de $\mathbb{R}$ est un point fixe. 1,5 pts

Exercice 4) suite

2) 1er cas si $p=1$

on a $f'(x_*) \neq 0 \Rightarrow \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ qui est la fonction d'itération de Newton.
or f est de classe C^2 alors la méthode est localement convergente et d'ordre 2. 1pt

2ème cas si $p \geq 2$

on a: • $\phi(x^*) = x^*$
• ϕ est au moins de classe C^2 car
$\forall x \in \mathbb{R}$ si $f'(x)=0$ alors $\phi(x) = x$ qui est C^∞ donc C^2
si $f'(x) \neq 0$ alors $\phi(x) = x - p\frac{f(x)}{f'(x)}$

2pts

or $f \in C^{p+1}$ et $f' \in C^p$ alors $\frac{f}{f'} \in C^p$
ainsi ϕ est la somme de deux fonctions dont l'une au moins de classe C^2 et l'autre au moins de classe C^2 (car $p \geq 2$).

• $\phi'(x_*) = 0$ "assure la convergence quadratique"

ces trois points montrent que la méthode d'approximation est localement convergente et au moins d'ordre 2.

Pour montrer $\phi'(x_*) = 0$ on calcul $\lim_{x \to x_*} \phi'(x)$ grâce au développement de Taylor de f au voisinage de x_* comme suit

$$f(x) = (x - x_*)^p q(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to x_*} q(x) \neq 0$$

En remplaçant cette expression de f dans la relation

$$\phi(x) = x - p\frac{f(x)}{f'(x)}$$ puis en dérivant on trouve $$\lim_{x \to x_*} \phi'(x) = 1 - p\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)\right) = 0.$$

3) $x_0 = 0$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
$f_0 = 0$; $f_1 = 1$ et $f_2 = 8$

$P(X) = X^3$

faux car le polynôme d'interpolation de lagrange sur 3 noeuds est au plus de degré 2.

1pt

4) $x_0 = 0$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
$f_0 = 0$; $f_1 = 1$ et $f_2 = -1$

$P(X) = X$ faux
car $P(x_2) \neq f_2$

1pt

5) $x_0 = 0$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
$f_0 = 1$; $f_1 = 0$ et $f_2 = 1$

$P(X) = (X-1)^2$ vrai
car c'est un polynôme de degré 2 qui passe par les trois noeuds.

1pt