4. Groupes : ordres, sous-groupes distingués, quotients

Exercice 4.1 Déterminer l'ensemble des entiers d tel qu'il existe une permutation dans S_7 d'ordre d.

Exercice 4.2
1. Donner un exemple de groupe commutatif G et de deux éléments $a, b \in G$ tous deux d'ordre 4 tels que le produit ab soit d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 4 ?
2. Montrer que dans un groupe commutatif G, l'ordre du produit ab divise $\text{ppcm}(\text{ordre}(a), \text{ordre}(b))$.
3. Est-il possible d'avoir un groupe G et deux éléments $x, y \in G$ d'ordre 2 tel que $x \cdot y$ soit d'ordre infini (si oui, donner un exemple ; si non, donner un court argument) ?
4. Est-il possible d'avoir un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini ?

Exercice 4.3 Combien y-a-t-il de groupes d'ordre 11 (à isomorphisme près) ?

Exercice 4.4 Soit G un groupe cyclique d'ordre $n > 0$ engendré par $a \in G$. L'opération de G sera notée multiplicativement et l'élément neutre de G sera désigné par e.
1. Donner un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et G.
2. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique. (Indication : pour un sous-groupe H non trivial, considérer a^i avec i minimal parmi les entiers $j > 0$ tel que $a^j \in H$.)
3. Soit $d|n$. Montrer que G possède un unique sous-groupe d'ordre d. (Indication : considérer l'ensemble $H := \{x \in G : x^d = e\}$.)
4. En déduire que pour tout $d|n$, il y a exactement$\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans G.
5. Montrer que
$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Exercice 4.5 Soient H et K des sous-groupes d'un groupe G tels que $K \leq H \leq G$. Si $[G : H]$ et $[H : K]$ sont finis, montrer que
$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

> **Rappel : Sous-groupe normal (ou distingué)**
> On dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est normal (ou distingué) si pour tout $x \in G$ on a $xH = Hx$.

Exercice 4.6
1. Montrer que le sous-groupe $H = \{id, (12)\} \subset S_3$ n'est pas distingué, et expliciter les classes à droite et à gauche modulo H.
2. Trouver tous les sous-groupes distingués du groupe symétrique S_3.
3. Montrer que la loi de composition sur S_3 n'induit pas une loi de groupe sur les classes à droite modulo H.

Exercice 4.7 On considère le sous-groupe H de S_5 engendré par (12) et (13).
1. Le sous-groupe H est-il distingué dans S_5 ?

2. Déterminer le nombre de classes à droite modulo H.

Exercice 4.8 Montrer qu'un sous-groupe $H \subset G$ d'indice 2 est toujours distingué.

Rappel : Soit $\phi : G \to G'$ un homomorphisme de groupe. Alors $\ker \phi$ est distingué.

Exercice 4.9 Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer de même que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.10 Soit $\phi : G \to G'$ un homomorphisme de groupe.

1. Soit H' un sous-groupe distingué de G'. Montrer que $\phi^{-1}(H')$ est distingué dans G.
2. Supposons que ϕ est surjective. Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que $\phi(H)$ est distingué dans G'.

Rappel : Quotient
Si H est un sous-groupe distingué de G, l'ensemble des classes (à droite ou à gauche) de G modulo H forme un groupe G/H appelé groupe quotient de G par H.

Passage au quotient (théorème d'isomorphisme de Noether)
Si $\varphi : G \to G'$ est un morphisme de groupe, il existe un unique isomorphisme $\bar{\varphi} : G/\ker \varphi \to \operatorname{Im} \varphi$ tel que $\varphi(x) = \bar{\varphi}(\bar{x})$.

Exercice 4.11
1. Montrer que le cercle unité $U \in \mathbb{C}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer que le groupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(U, .)$.
3. Montrer que la loi . sur $\mathbb{R}$ n'induit pas une loi sur le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 4.12 Fixons deux entiers strictement positifs m et n et considérons l'homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & a & \mapsto & (a \bmod m,\ a \bmod n) \end{array}$$

1. Déterminer le noyau de φ.
2. Retrouver le théorème des restes chinois.

Exercice 4.13 On rappelle (ou on admet) que A_n désigne le sous-groupe de S_n constitué des permutations de signature 1 et que ce sous-groupe est engendré par les 3-cycles.

Soit H un sous-groupe normal de A_5.

1. Montrer que si H contient un 3-cycle alors $H = A_5$.
2. Montrer que si H contient σ produit de deux transpositions à supports disjoints, alors il existe un 3-cycle $\gamma \in A_5$ tel que $\gamma\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}$ soit un 3-cycle.
3. En s'inspirant de la question précédente, montrer que H contient toujours un 3-cycle.
4. Montrer que A_5 est un groupe simple.
5. Que peut-on dire de A_n pour $n \geq 5$.