

**Feuille d'exercices numéro 2**  
Mesures

Sauf mention contraire,  $\mu$  dénote une mesure sur un espace mesurable  $(X, \mathcal{T})$ .

**Exercice 1 Vrai ou Faux ?**

- (1) Si  $A \in \mathcal{T}$ , alors  $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$ .
- (2) Si  $(A_n)$  est une suite décroissante d'éléments de  $\mathcal{T}$  et  $\mu(A_2) < +\infty$ , alors  $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .
- (3) Une réunion de parties de mesure nulle est de mesure nulle.
- (4) Si  $A, B \in \mathcal{T}$  et  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ , alors  $A$  et  $B$  sont disjoints.
- (5) Il existe un espace mesuré  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  tel que  $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathcal{T}\} = \{0, 1, 2\}$ .
- (6) Il existe un espace mesuré  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  tel que  $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathcal{T}\} = \{0, 1, 3\}$ .
- (7) La mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$  est  $\sigma$ -finie.

**Exercice 2** Soit  $\mu$  la mesure de comptage sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ . Trouver une suite décroissante d'ensembles  $(A_n)$  telle que  $\mu(A_n) \not\rightarrow \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ .

**Exercice 3** On rappelle que  $\mu$  est  $\sigma$ -finie s'il existe une suite  $(A_n)$  d'éléments de  $\mathcal{T}$  telle que  $\bigcup_n A_n = X$  et  $\mu(A_n) < +\infty$  pour tout  $n$ . Montrer que si  $\mu$  est  $\sigma$ -finie, on peut choisir les  $A_n$  deux à deux disjoints.

**Exercice 4** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable tel que la tribu  $\mathcal{T}$  contient les singletons. Soit  $\mu$  une mesure finie sur  $(X, \mathcal{T})$ . On note  $D = \{x \in X \text{ t.q. } \mu(\{x\}) > 0\}$ . Montrer que  $D$  est au plus dénombrable. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose plus que la mesure est finie ? Et si on suppose que la mesure est  $\sigma$ -finie ?

**Exercice 5**

- (a) Soient  $A$  et  $B$  deux parties mesurables telles que l'une d'elles soit de mesure finie. Montrer que  $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$ .
- (b) Soient  $A$  et  $B$  deux parties mesurables telles que  $\mu(A) + \mu(B) > \mu(X)$ . Montrer que  $A \cap B \neq \emptyset$ .
- (c) Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite finie de parties mesurables telle que  $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$ . Montrer qu'il existe un indice  $j$  tel que  $\mu(A_j) \geq \frac{\mu(X)}{n}$ .

**Exercice 6 (Partiel automne 2006)** Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré tel que  $\mu(X) = 1$ . Soit  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$  l'ensemble défini par

$$\mathcal{T}' = \{A \in \mathcal{T} \text{ t.q. } \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$

Montrer que  $\mathcal{T}'$  est une tribu dans  $X$ .

**Exercice 7** Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite quelconque de parties mesurables.

(a) Établir les encadrements suivants :

- (a1)  $\sup_{n \geq 1} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$ .
- (a2)  $0 \leq \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) \leq \inf_{n \geq 1} \mu(A_n)$ .

(b) Montrer les implications suivantes :

- (b1)  $\forall n, \mu(A_n) = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = 0$ .
- (b2)  $\mu(X) = 1 \text{ et } \forall n, \mu(A_n) = 1 \implies \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = 1$ .

**Exercice 8** Soit  $(E, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré, tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\{x\} \in \mathcal{T}$  et  $\mu(\{x\}) < +\infty$ . On dit que  $\mu$  est *diffuse* (ou *continue*) si, pour tout  $x \in E$ ,  $\mu(\{x\}) = 0$ . On dit que  $\mu$  est *discrète* s'il existe un ensemble  $D$  au plus dénombrable tel que  $\mu(D^c) = 0$ .

(a) Montrer que  $\mu$  est diffuse si et seulement si toute partie  $A$  au plus dénombrable est  $\mu$ -négligeable.

- (b) Montrer que  $\mu$  est discrète si et seulement s'il existe une suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $E$  et une suite  $(c_n)_{n \geq 1}$  de réels positifs telles que  $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \delta_{a_n}$ .
- (c) On suppose maintenant que la mesure  $\mu$  est  $\sigma$ -finie. Montrer que  $\mu$  s'écrit de façon unique  $\mu = \mu_c + \mu_d$  où  $\mu_c$  est une mesure diffuse et  $\mu_d$  est une mesure discrète.

**Exercice 9 Mesure image.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  des espaces mesurables, et  $\phi : X \rightarrow Y$  une fonction mesurable. Soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathcal{T}$ . On définit  $\nu : \mathcal{T}' \rightarrow [0, +\infty]$  par  $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$ .

- (a) Montrer que  $\nu$  est une mesure sur  $\mathcal{T}'$ . On dit que c'est la mesure image de  $\mu$  par  $\phi$ , et on la note  $\phi_*\mu$ .
- (b) On choisit  $\mu = \delta_a$ , où  $a \in X$ . Déterminer  $\phi_*\delta_a$ .
- (c) On suppose que  $\mu$  est une mesure sur  $\mathcal{T}$  vérifiant  $\mu(X) = 1$ . On fixe  $B \in \mathcal{T}$  et on choisit  $(Y, \mathcal{T}') = (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ . Déterminer  $(\mathbf{1}_B)_*\mu$ .

**Exercice 10 Applications préservant une mesure.**

On fixe un espace mesuré  $(X, \mathcal{T}, \mu)$ , avec  $\mu(X) < +\infty$ . On dit qu'une application  $f : X \rightarrow X$  préserve  $\mu$  si pour tout  $A \in \mathcal{T}$ ,  $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$  et  $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ . Soit  $f$  une application qui préserve  $\mu$ . On pose  $f^1 = f$ , et  $f^{n+1} = f^n \circ f$ , pour  $n \geq 1$ .

- (1) Montrer que  $f^n$  préserve  $\mu$  pour tout  $n \geq 1$ .
- (2) On fixe  $A \in \mathcal{T}$ . Soit  $F = \{x \in A \text{ t.q. } \forall n \geq 1, f^n(x) \notin A\}$ .
- (2a) Montrer que  $F \in \mathcal{T}$ .
- (2b) Pour  $p \geq 1$ , soit  $F_p = (f^p)^{-1}(F)$ . Montrer que les ensembles  $(F_p)$  sont deux à deux disjoints.
- (2c) En déduire que  $\mu(F) = 0$ .

**Exercice 11 Fonction de répartition.** Soit  $\mu$  une mesure sur  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$  telle que  $\mu(\mathbf{R}) = 1$ .

Pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on pose  $F(t) = \mu(]-\infty, t])$ .

- (a) Montrer que  $F$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .
- (b) Montrer que  $F$  est croissante.
- (c) Déterminer les limites de  $F(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ .
- (d) Montrer que  $F$  est continue à gauche et admet une limite à droite en tout point. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $\mu$  pour que  $F$  soit continue sur  $\mathbf{R}$ .

On suppose désormais que  $F$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .

- (e) Soit  $x \in ]0, 1[$ . Montrer que  $F^{-1}(\{x\})$  est un intervalle compact non vide de  $\mathbf{R}$ . On note cet intervalle  $[s_x, t_x]$ .
- (f) Montrer que  $t < s_x$  si et seulement si  $F(t) < x$ .
- (g) Soit  $\nu = F_*\mu$  la mesure image de  $\mu$  par l'application  $F$ . Que vaut  $\nu(]-\infty, x])$  pour  $x \in \mathbf{R}$  ?
- (h) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Montrer qu'il existe un segment  $I \subset [a, b]$ , de longueur  $\frac{1}{2}(b-a)$  et tel que  $\mu(I) = \frac{1}{2}\mu([a, b])$ .