CHAPITRE II

L'INTÉGRALE DE RIEMANN

1. — Fonctions Riemann intégrables

1.1. Définition de l'intégrale de Riemann. — Dans un mémoire de 1854[1], Bernhard RIEMANN définit l'intégrale d'une fonction bornée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ comme la limite (lorsqu'elle existe) des sommes finies $\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ quand $Sup_i \Delta x_i \to 0$. Chaque somme $\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ est obtenue en divisant $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur Δx_i, puis en choisissant arbitrairement un point ξ_i dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$; elle s'interprète comme l'intégrale d'une fonction en escalier égale à $f(\xi_i)$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ (cf. fig. 1). Pour que ce procédé définisse l'intégrale de f, il faut évidemment que les sommes $\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ convergent vers une limite

[1] Bernhard RIEMANN a défini l'intégrale qui porte son nom en 1854, dans les préliminaires d'un mémoire sur les séries trigonométriques.

quand $Sup_i \Delta x_i \to 0$, ce qu'impose RIEMANN. Détaillons cette construction.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction arbitraire. Par *subdivision riemannienne* de $[a,b]$, on désigne un couple (σ,ξ) formé d'une subdivision

$$\sigma : a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$$

de $[a,b]$ et d'une suite $\xi = (\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ de réels choisis de sorte que $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ quel que soit $i = 0,1,\ldots,n-1$. Le *pas* de la subdivision σ est par définition la quantité :

$$\delta(\sigma) = Max_{0 \leq i \leq n-1}(x_{i+1} - x_i).$$

A toute subdivision riemannienne (σ,ξ) de $[a,b]$, on associe la *somme de* RIEMANN :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) f(\xi_i).$$

Fig.1. — Sommes de Riemann d'une fonction.

DÉFINITION 1. — *La fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est dite intégrable au sens de* RIEMANN *sur* $[a,b]$ *si les sommes de* RIEMANN $S(f,\sigma,\xi)$ *tendent vers une limite* I *quand* $\delta(\sigma) \to 0$.

Si f est intégrable au sens de RIEMANN, la limite I (qui est unique) est appelée *intégrale de* RIEMANN de f sur $[a,b]$; on la note :

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

On désignera par $\mathfrak{R}^1([a,b])$ l'ensemble des fonctions réelles intégrables au sens de RIEMANN sur $[a,b]$. La fonction f appartient donc à $\mathfrak{R}^1([a,b])$ et a pour intégrale I s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ tel que l'on ait, quelle que soit la subdivision riemannienne (σ,ξ) de $[a,b]$:

$$\delta(\sigma) \leq \eta \Rightarrow \left| S(f,\sigma,\xi) - I \right| \leq \varepsilon .$$

Comme $\mathbb{R}$ est un espace complet[2], la convergence des sommes de RIEMANN $S(f,\sigma,\xi)$ lorsque $\delta(\sigma) \to 0$ équivaut au fait qu'elles vérifient la propriété de CAUCHY :

$$\left| S(f,\sigma,\xi) - S(f,\sigma^*,\xi^*) \right| \to 0$$

quand $\delta(\sigma), \delta(\sigma^*) \to 0$. Ceci signifie qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ tel que l'on ait, quelles que soient les subdivisions riemanniennes (σ,ξ) et (σ^*,ξ^*) de $[a,b]$:

$$\delta(\sigma), \delta(\sigma^*) \leq \eta \Rightarrow \left| S(f,\sigma,\xi) - S(f,\sigma^*,\xi^*) \right| \leq \varepsilon .$$

Donnons maintenant des exemples de fonctions intégrables au sens de RIEMANN.

PROPOSITION 1. — *Toute fonction en escalier sur* $[a,b]$ *est intégrable au sens de* RIEMANN, *et son in-*

---

[2] Rappelons que toute suite de CAUCHY de $\mathbb{R}$ converge.

tégrale de RIEMANN *coïncide avec son intégrale définie entre* a *et* b.

En effet, soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction en escalier associée à une subdivision de $[a,b]$ en n intervalles $[a_i,a_{i+1}]$ sur lesquels elle prend la valeur constante c_i. Pour toute subdivision riemannienne (σ,ξ) de $[a,b]$, on vérifie facilement (en considérant la subdivision formée des points de σ et des a_i) que l'on a :

$$\left|S(f,\sigma,\xi)-\sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)c_i\right|\leq 4n\|f\|_\infty\,\delta(\sigma).$$

Il s'ensuit que $S(f,\sigma,\xi)\to\sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)c_i$ quand $\delta(\sigma)\to 0$, ce qui prouve que f est RIEMANN intégrable, d'intégrale égale à $\sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)c_i$. ■

Plus généralement, toute fonction réglée sur $[a,b]$ est intégrable au sens de RIEMANN, comme nous le verrons plus loin. On notera qu'il existe des fonctions non intégrables au sens de RIEMANN et dont l'intégrale définie existe cependant.

C'est le cas par exemple de la fonction de DIRICHLET $\chi:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $\chi(x)=0$ si x est rationnel et $\chi(x)=1$ sinon. La fonction χ admet pour primitive (au sens défini au chapitre I) la fonction $F(x)=x$; son intégrale est donc définie par la formule :

$$\int_o^1\chi(x)dx=F(1)-F(0)=1.$$

La fonction χ n'est cependant pas intégrable au sens de RIEMANN. On peut en effet associer à toute subdivision

$$\sigma : a=x_o<x_1<\ldots<x_n=b$$

de $[0,1]$ une subdivision riemannienne (σ,ξ) telle que tous les ξ_i soient rationnels, et une autre (σ,ξ^*) dont tous les ξ_i^* sont irrationnels. On a alors :

$$\left|S(\chi,\sigma,\xi)-S(\chi,\sigma,\xi^*)\right|=|0-1|=1,$$

ce qui prouve que les sommes de RIEMANN $S(\chi,\sigma,\xi)$ ne convergent pas lorsque $\delta(\sigma)\to 0$.

1.2. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann. — Une fonction intégrable au sens de RIEMANN sur un intervalle $[a,b]$ est nécessairement bornée sur cet intervalle. En effet, désignons par $\|f\|_\infty = Sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ la norme de la convergence uniforme sur $[a,b]$; on a :

PROPOSITION 2. — *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$. *Alors,* f *est bornée sur* $[a,b]$ *et on a :*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty .$$

Comme f est intégrable au sens de RIEMANN, il existe en vertu du critère de CAUCHY une subdivision :

$$\sigma : a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$$

de $[a,b]$ telle que l'on ait, quelle que soit la manière de choisir ξ et ξ^* pour former des subdivisions riemanniennes (σ,ξ) et (σ,ξ^*) de $[a,b]$:

$$(1)\quad \left|S(f,\sigma,\xi)-S(f,\sigma,\xi^*)\right| \leq 1 .$$

Choisissons ξ de sorte que $\xi_j = x_j$ pour tout j. Pour i fixé et $x\in[x_i,x_{i+1}]$, choisissons ξ^* de sorte que $\xi_j^* = \xi_j$ si $j\neq i$ et $\xi_i^* = x$. La relation (1) s'écrit alors :

$$\left|(x_{i+1}-x_i)(f(x_i)-f(x))\right| \leq 1 \ ;$$

elle implique que :

$$|f(x)| \leq |f(x_i)| + \tfrac{1}{x_{i+1}-x_i} \leq C = Max_i(|f(x_i)| + \tfrac{1}{x_{i+1}-x_i}) .$$

Comme cette majoration est vraie pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on a $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in [a,b]$ et f est bornée. De la majoration évidente :

$$|S(f,\sigma,\xi)| \leq (b-a)\|f\|_\infty$$

on déduit alors, en faisant tendre $\delta(\sigma)$ vers 0 :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty . \blacksquare$$

La proposition suivante énonce quelques propriétés élémentaires de l'intégrale de RIEMANN.

PROPOSITION 3. — *Soient $a < b$. Alors $\mathfrak{R}^1([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions bornées sur $[a,b]$ sur lequel l'intégrale de* RIEMANN $f \to \int_a^b f(x)dx$ *est une forme linéaire possédant les propriétés suivantes :*

(i) Pour toute $f \in \mathfrak{R}^1([a,b])$, on a :

$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq (b-a)\|f\|_\infty .$$

En particulier, la forme linéaire $f \to \int_a^b f(x)dx$ est continue sur $\mathfrak{R}^1([a,b])$ muni de la norme de la convergence uniforme ;

(ii) Si les fonctions f,g sont intégrables au sens de RIEMANN *et vérifient $f(x) \leq g(x)$ pour tout x, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

En particulier, si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x, on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) .$$

Soient f,g deux fonctions intégrables au sens de RIEMANN sur $[a,b]$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Pour toute subdivision riemannienne (σ,ξ) de $[a,b]$, on a :

$$S(\lambda f+\mu g,\sigma,\xi)=\lambda S(f,\sigma,\xi)+\mu S(g,\sigma,\xi)\,,$$

et donc

$$S(\lambda f+\mu g,\sigma,\xi)\to\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$$

quand $\delta(\sigma)\to 0$. Ceci prouve que $\lambda f+\mu g$ est intégrable au sens de RIEMANN sur $[a,b]$ et que :

$$\int_a^b(\lambda f+\mu g)(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx\,.$$

Ainsi, $\mathfrak{R}^1([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions bornées sur $[a,b]$, et l'intégrale de RIEMANN $f\to\int_a^b f(x)dx$ est une forme linéaire. La propriété *(i)* résulte de la proposition 2. Supposons enfin que les fonctions f,g de $\mathfrak{R}^1([a,b])$ vérifient $f(x)\le g(x)$ pour tout x. On en déduit que $S(f,\sigma,\xi)\le S(g,\sigma,\xi)$ pour toute subdivision riemannienne (σ,ξ) de $[a,b]$, d'où la propriété *(ii)* quand $\delta(\sigma)\to 0$. ■

1.3. Limites des fonctions intégrables. — Une limite simple de fonctions RIEMANN intégrables n'est pas RIEMANN intégrable en général (car cette limite peut ne pas être bornée). En revanche, pour les limites uniformes de fonctions intégrables au sens de RIEMANN, on a :

THÉORÈME 1. — *Soit $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ une suite de fonctions intégrables au sens de* RIEMANN *sur $[a,b]$. On suppose que les f_n convergent uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Alors f est intégrable au sens de* RIEMANN *sur $[a,b]$ et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx\,.$$

En effet, de la relation :

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f_p(x)dx\right| \le (b-a)\left\| f_n - f_p \right\|_\infty ,$$

on déduit que la suite des intégrales $I_n = \int_a^b f_n(x)dx$ est de Cauchy, donc converge vers une limite I. Pour toute subdivision riemannienne (σ,ξ) de $[a,b]$, on a :

$$\begin{aligned} \left|S(f,\sigma,\xi)-I\right| &\le \left|S(f,\sigma,\xi)-S(f_n,\sigma,\xi)\right| \\ &\quad + \left|S(f_n,\sigma,\xi)-I_n\right| + \left|I_n - I\right| \\ &\le (b-a)\left\|f-f_n\right\|_\infty + \left|S(f_n,\sigma,\xi)-I_n\right| + \left|I_n-I\right| , \end{aligned}$$

de sorte qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier $N \ge 1$ tel que l'on ait :

$$\left|S(f,\sigma,\xi)-I\right| \le \tfrac{\varepsilon}{2} + \left|S(f_N,\sigma,\xi)-I_N\right|$$

quelle que soit (σ,ξ). Comme $S(f_N,\sigma,\xi) \to I_N$ quand $\delta(\sigma) \to 0$, il existe $\eta > 0$ tel que la condition $\delta(\sigma) \le \eta$ implique $\left|S(f_N,\sigma,\xi)-I_N\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors, on a :

$$\delta(\sigma) \le \eta \Rightarrow \left|S(f,\sigma,\xi)-I\right| \le \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

ce qui prouve que f est RIEMANN intégrable et que son intégrale est égale à $I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$. ∎

Du théorème 1, on déduit immédiatement :

COROLLAIRE 1. — *La somme* $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *d'une série uniformément convergente de fonctions* RIEMANN *intégrables* $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable au sens de* RIEMANN *sur* $[a,b]$ *et s'intègre terme à terme :*

$$\int_a^b u(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx .$$

Le théorème 1 implique que les fonctions réglées sont intégrables au sens de RIEMANN :

COROLLAIRE 2. — *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction réglée sur* $[a,b]$*. Alors,* f *est intégrable au sens* *de* RIEMANN *sur* $[a,b]$ *et son intégrale de* RIEMANN *coïncide avec son intégrale définie entre* a *à* b.

La fonction réglée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est RIEMANN intégrable comme limite uniforme d'une suite $(f_1, f_2,...)$ de fonctions en escalier (donc RIEMANN intégrables en vertu de la proposition 1). En outre, l'intégrale définie de f entre a et b est la limite des intégrales $\int_a^b f_n(x)dx$ (cf. chapitre I), tout comme l'intégrale de RIEMANN de f en vertu du théorème 1. ■

2. — Le critère d'intégrabilité de Riemann

L'intégrabilité (au sens de RIEMANN) d'une fonction réelle bornée sur un intervalle $[a,b]$ est directement reliée à la manière dont cette dernière oscille autour de chacune de ses valeurs. Un premier critère, dû à RIEMANN, établit qu'une fonction bornée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si son oscillation moyenne est nulle. Nous exposons ci-dessous ce résultat.

2.1. Oscillation sur un ensemble. — Considérons une fonction bornée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Pour toute partie V de $[a,b]$, on note respectivement par

$$m(f,V) = Inf_{x\in V}\, f(x) \text{ et } M(f,V) = Sup_{x\in V}\, f(x)$$

la borne inférieure et la borne supérieure de f sur V. La différence

$$\omega(f,V) = M(f,V) - m(f,V)$$

est appelée l'*oscillation* de f sur V. On posera :

$$m(f) = m(f,[a,b]),\; M(f) = M(f,[a,b]) \text{, et}$$

$$\Omega(f) = \omega(f,[a,b]) = M(f) - m(f).$$

On vérifie immédiatement que :

$$0 \leq \Omega(f) \leq 2Sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = 2\|f\|_\infty,$$

où $\|f\|_\infty = Sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ désigne la norme uniforme de f sur $[a,b]$.

On notera pour la suite que, si V, W sont deux parties de $[a,b]$ telles que $W \subset V$, alors on a :

$$m(f,V) \leq m(f,W) \leq M(f,W) \leq M(f,V),$$

et donc :

$$0 \leq \omega(f,W) \leq \omega(f,V) \leq \Omega(f).$$

2.2. Sommes de Darboux. — Pour toute subdivision $\sigma : a = x_o < x_1 < ... < x_n = b$ du segment $[a,b]$, posons $m_i = m(f,[x_i, x_{i+1}])$, $M_i = M(f,[x_i, x_{i+1}])$ et $\omega_i = \omega(f,[x_i, x_{i+1}])$. Les sommes :

$$\Sigma_-(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i,$$

$$\Sigma_+(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i,$$

$$\omega(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\omega_i,$$

sont appelées *somme de* DARBOUX *inférieure*, *somme de* DARBOUX *supérieure* et *oscillation moyenne* de f relatives à la subdivision σ.

On dira qu'une subdivision σ^* de $[a,b]$ est *plus fine* qu'une subdivision σ si les points de subdivision de σ sont des points de subdivision de σ^*. Étant donné deux subdivisions σ et σ^* de $[a,b]$, on notera $\sigma \cup \sigma^*$ la subdivision formée des points de σ et de

σ^*. Il est clair que $\sigma \cup \sigma^*$ est plus fine que σ et σ^*. Avec ces notations, on a :

PROPOSITION 4. — *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée.*

(i) *Pour toute subdivision riemannienne* (σ,ξ) *de* $[a,b]$*, on a :*

$$\Sigma_-(f,\sigma) \leq S(f,\sigma,\xi) \leq \Sigma_+(f,\sigma) \ ;$$

(ii) *Si la subdivision* σ^* *de* $[a,b]$ *est plus fine que la subdivision* σ*, on a :*

$$\Sigma_-(f,\sigma) \leq \Sigma_-(f,\sigma^*) \leq \Sigma_+(f,\sigma^*) \leq \Sigma_+(f,\sigma) \ ;$$

(iii) *Quelles que soient les subdivisions riemanniennes* (σ,ξ) *et* (σ^*,ξ^*) *de* $[a,b]$*, on a :*

$$\left| S(f,\sigma,\xi) - S(f,\sigma^*,\xi^*) \right| \leq \omega(f,\sigma) + \omega(f,\sigma^*) \, .$$

La propriété *(i)* est immédiate. Pour démontrer la propriété *(ii),* il suffit de considérer le cas où σ^* est obtenue en ajoutant un point supplémentaire c à la subdivision σ. Si $c \in [x_i, x_{i+1}]$, l'inégalité $\Sigma_-(f,\sigma) \leq \Sigma_-(f,\sigma^*)$ se ramène alors à la relation :

$$(x_{i+1} - x_i) m(f,[x_i,x_{i+1}]) \leq (c - x_i) m(f,[x_i,c]) \\ + (x_{i+1} - c) m(f,[c,x_{i+1}]),$$

qui résulte immédiatement du fait que $m(f,[x_i,x_{i+1}])$ est inférieur ou égal à $m(f,[x_i,c])$ et à $m(f,[c,x_{i+1}])$. On démontre de même l'inégalité $\Sigma_+(f,\sigma^*) \leq \Sigma_+(f,\sigma)$, d'où l'assertion *(ii).* Pour démontrer l'assertion *(iii)*, considérons une subdivision riemannienne $(\sigma \cup \sigma^*, \zeta)$ de $[a,b]$. Comme la subdivision $\sigma \cup \sigma^*$ est plus fine que σ, le segment $\left[\Sigma_-(f,\sigma \cup \sigma^*), \Sigma_+(f,\sigma \cup \sigma^*)\right]$ est contenu dans le segment $[\Sigma_-(f,\sigma), \Sigma_+(f,\sigma)]$ en vertu de l'assertion *(ii).* Il s'ensuit que $S(f,\sigma \cup \sigma^*,\zeta)$ appartient au segment $\left[\Sigma_-(f,\sigma),\Sigma_+(f,\sigma)\right]$, tout comme $S(f,\sigma,\xi)$ (en vertu de *(i)*), d'où :

$$(1)\ \left|S(f,\sigma,\xi)-S(f,\sigma\cup\sigma^*,\zeta)\right|\leq \Sigma_+(f,\sigma)-\Sigma_-(f,\sigma) = \omega(f,\sigma).$$

Le même raisonnement montre que :

$$(2)\ \left|S(f,\sigma\cup\sigma^*,\zeta)-S(f,\sigma^*,\xi^*)\right|\leq \omega(f,\sigma^*),$$

et l'assertion *(iii)* résulte alors immédiatement de (1) et (2) (via l'inégalité triangulaire). ■

Le lemme suivant permet de comparer $\omega(f,\sigma)$ et $\omega(f,\sigma^*)$ sans supposer que l'une ou l'autre des subdivisions σ,σ^* est plus fine que l'autre.

LEMME 1. — *Soient* $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ *une fonction bornée et* σ_o *une subdivision de* $\left[a,b\right]$. *Notons* $N(\sigma_o)$ *le nombre de points de subdivision de* σ_o. *Alors on a, pour toute subdivision* σ *de* $\left[a,b\right]$ *:*

$$\omega(f,\sigma)\leq\omega(f,\sigma_o)+2N(\sigma_o)\Omega(f)\delta(\sigma).$$

Notons $x_{o,i}$ (resp. x_j) les points de subdivision de σ_o (resp. de σ) et $\omega_{o,i}$ (resp. ω_j) l'oscillation de f sur $\left[x_{o,i},x_{o,i+1}\right]$ (resp. sur $\left[x_j,x_{j+1}\right]$). Pour tous les intervalles $\left[x_j,x_{j+1}\right]$ contenus dans un même intervalle $\left[x_{o,i},x_{o,i+1}\right]$, on a $\omega_j\leq\omega_{o,i}$; par conséquent, la somme des quantités $(x_{j+1}-x_j)\omega_j$ correspondantes est majorée par $(x_{o,i+1}-x_{o,i})\omega_{o,i}$. Il s'ensuit que la somme des nombres $(x_{j+1}-x_j)\omega_j$ associés aux intervalles $\left[x_j,x_{j+1}\right]$ qui sont contenus dans un intervalle $\left[x_{o,i},x_{o,i+1}\right]$ est majorée par $\omega(f,\sigma_o)$. Les intervalles $\left[x_j,x_{j+1}\right]$ non contenus dans un intervalle $\left[x_{o,i},x_{o,i+1}\right]$ sont au plus au nombre de $2+2(N(\sigma_o)-2)\leq 2N(\sigma_o)$. Pour de tels intervalles, le nombre $(x_{j+1}-x_j)\omega_j$ est majoré par $\delta(\sigma)\Omega(f)$. La somme des quantités $(x_{j+1}-x_j)\omega_j$ associées aux intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ non contenus dans un intervalle $[x_{o,i}, x_{o,i+1}]$ est donc majorée par $2N(\sigma_o)\Omega(f)\delta(\sigma)$, d'où le lemme 1. ■

2.3. Oscillation moyenne d'une fonction. — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On appelle *oscillation moyenne* de f la borne inférieure $\overline{\omega}(f)$ des oscillations $\omega(f,\sigma)$ lorsque σ parcourt l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. Montrons que cette oscillation moyenne est aussi la limite des $\omega(f,\sigma)$ quand $\delta(\sigma) \to 0$:

PROPOSITION 5. — *L'oscillation moyenne $\overline{\omega}(f)$ d'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est la limite des oscillations $\omega(f,\sigma)$ relatives aux subdivisions σ de $[a,b]$ quand $\delta(\sigma) \to 0$.*

Par définition de l'oscillation moyenne, il existe en effet pour tout $\varepsilon > 0$ une subdivision σ_o de $[a,b]$ telle que :

$$\overline{\omega}(f) \leq \omega(f,\sigma_o) \leq \overline{\omega}(f) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons $\eta > 0$ tel que $N(\sigma_o)\Omega(f)\eta \leq \frac{\varepsilon}{4}$. D'après le lemme 1, on a pour toute subdivision σ telle que $\delta(\sigma) \leq \eta$:

$$\begin{aligned}\overline{\omega}(f) \leq \omega(f,\sigma) &\leq \omega(f,\sigma_o) + 2N(\sigma_o)\Omega(f)\eta \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \overline{\omega}(f) + \tfrac{\varepsilon}{2} = \overline{\omega}(f) + \varepsilon,\end{aligned}$$

d'où $|\overline{\omega}(f) - \omega(f,\sigma)| \leq \varepsilon$. Ceci démontre la proposition 5. ■

Il résulte de la proposition 5 que l'oscillation moyenne d'une fonction bornée est nulle si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait, pour toute subdivision σ de $[a,b]$:

$$\delta(\sigma) \leq \eta \Rightarrow \omega(f,\sigma) \leq \varepsilon \;;$$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\omega(f,\sigma) \leq \varepsilon$.

2.4. Le critère de Riemann. — Avec les notations de la section précédente, le critère d'intégrabilité de RIEMANN s'énonce :

THÉORÈME 2. — *Une fonction réelle bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de* RIEMANN *si et seulement si son oscillation moyenne $\overline{\omega}(f)$ est nulle.*

Supposons que f soit intégrable au sens de RIEMANN et montrons que $\overline{\omega}(f) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision

$$\sigma : a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$$

de $[a,b]$ telle que l'on ait, quels que soient les choix de ξ et ξ' avec $\xi_i, \xi_i' \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$(1) \quad \left| S(f,\sigma,\xi') - S(f,\sigma,\xi) \right| \leq \varepsilon .$$

Choisissons des suites $(\xi_\nu)_\nu$ et $(\xi'_\nu)_\nu$ telles que, pour tout $i = 0,1,\ldots,n-1$, on ait $f(\xi_{\nu,i}) \to m_i$ et $f(\xi'_{\nu,i}) \to M_i$ quand $\nu \to \infty$. De la relation (1), on déduit :

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(f(\xi'_{\nu,i}) - f(\xi_{\nu,i}) \right| \leq \varepsilon ,$$

d'où, en faisant tendre ν vers l'infini :

$$\omega(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(M_i - m_i) \leq \varepsilon .$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il s'ensuit que l'oscillation moyenne de f est nulle.

Inversement, si $\overline{\omega}(f)=0$, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un réel $\eta>0$ tel que l'on ait pour toute subdivision σ de $[a,b]$ (cf. proposition 5) :

$$(2)\quad \delta(\sigma)\leq\eta\Rightarrow\omega(f,\sigma)\leq\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, si (σ,ξ) et (σ^*,ξ^*) sont deux subdivisions riemanniennes de $[a,b]$ qui vérifient $\delta(\sigma),\delta(\sigma^*)\leq\eta$, on a en vertu de la proposition 4 *(iii)* et de la relation (2) :

$$\left|S(f,\sigma,\xi)-S(f,\sigma^*,\xi^*)\right|\leq\omega(f,\sigma)+\omega(f,\sigma^*)\leq\varepsilon,$$

ce qui prouve que f est intégrable au sens de RIEMANN sur $[a,b]$. ■

Ainsi, une fonction bornée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable au sens de RIEMANN si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que l'on ait, pour toute subdivision σ de $[a,b]$:

$$\delta(\sigma)\leq\eta\Rightarrow\omega(f,\sigma)\leq\varepsilon\ ;$$

(ii) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\omega(f,\sigma)\leq\varepsilon$.

On en déduit la caractérisation alternative suivante des fonctions intégrables au sens de RIEMANN :

COROLLAIRE 3. — *Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable au sens de* RIEMANN *si et seulement s'il existe, pour tout $\varepsilon>0$, deux fonctions e_ε et g_ε en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $e_\varepsilon\leq f\leq g_\varepsilon$ et*

$$\int_a^b\left[g_\varepsilon(x)-e_\varepsilon(x)\right]dx\leq\varepsilon.$$

Si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une subdivision $\sigma : a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que l'on ait (cf. théorème 2) :

$$(1) \quad \Sigma_+(f,\sigma) - \Sigma_-(f,\sigma) = \omega(f,\sigma) \leq \varepsilon .$$

Notons e_ε (resp. g_ε) la fonction en escalier égale à $m(f,[x_i,x_{i+1}])$ (resp. à $M(f,[x_i,x_{i+1}])$) sur $[x_i,x_{i+1}[$ et à $f(b)$ au point b. On a $e_\varepsilon \leq f \leq g_\varepsilon$ et, comme :

$$\Sigma_-(f,\sigma) = \int_a^b e_\varepsilon(x)dx, \quad \Sigma_+(f,\sigma) = \int_a^b g_\varepsilon(x)dx ,$$

la relation (1) implique que :

$$\int_a^b \left[g_\varepsilon(x) - e_\varepsilon(x) \right] dx \leq \varepsilon .$$

Inversement, supposons l'existence de deux fonctions en escalier e_ε et g_ε vérifiant les conditions du corollaire 3 et montrons que f est intégrable au sens de RIEMANN. Comme e_ε et g_ε sont bornées, la relation $e_\varepsilon \leq f \leq g_\varepsilon$ implique que f est bornée. Notons σ_ε une subdivision de $[a,b]$ associée à e_ε (i.e. e_ε est constante entre deux points consécutifs de σ_ε). Quitte à modifier e_ε aux points de σ_ε (par exemple en remplaçant la valeur de e_ε en ces points par celle de f) on peut supposer, sans changer la relation $e_\varepsilon \leq f$, que la borne inférieure de f sur chaque intervalle de la subdivision σ_ε est égale à la valeur prise par e_ε à l'intérieur de cet intervalle. L'intégrale définie de e_ε n'est pas modifiée, et on a :

$$\Sigma_-(e_\varepsilon,\sigma_\varepsilon) = \int_a^b e_\varepsilon(x)dx .$$

De même, il existe une subdivision σ_ε^* associée à g_ε (que l'on a éventuellement modifiée en certains points de cette subdivision sans changer la relation $f \leq g_\varepsilon$) telle que l'on ait :

$$\Sigma_+(g_\varepsilon,\sigma_\varepsilon^*) = \int_a^b g_\varepsilon(x)dx .$$

On peut donc choisir les subdivisions σ_ε et σ_ε^* de telle sorte que l'on ait :

$$\Sigma_+(g_\varepsilon,\sigma_\varepsilon^*)-\Sigma_-(e_\varepsilon,\sigma_\varepsilon)=\int_a^b g_\varepsilon(x)dx-\int_a^b e_\varepsilon(x)dx\leq\varepsilon\,.$$

Considérons alors la subdivision $\sigma=\sigma_\varepsilon\cup\sigma_\varepsilon^*$ de $[a,b]$. De la relation $e_\varepsilon\leq f$ on déduit que :

$$\Sigma_-(e_\varepsilon,\sigma_\varepsilon)\leq\Sigma_-(f,\sigma_\varepsilon)\leq\Sigma_-(f,\sigma)\,.$$

De même, on montre que :

$$\Sigma_+(f,\sigma)\leq\Sigma_+(f,\sigma_\varepsilon^*)\leq\Sigma_+(g,\sigma_\varepsilon^*)\,,$$

d'où l'on déduit finalement que :

$$\omega(f,\sigma)\leq\Sigma_+(g_\varepsilon,\sigma_\varepsilon^*)-\Sigma_-(e_\varepsilon,\sigma_\varepsilon)\leq\varepsilon\,.$$

Il résulte alors du théorème 2 que f est intégrable au sens de RIEMANN sur $[a,b]$. ■

3. — Le critère d'intégrabilité de Lebesgue

Nous démontrons dans ce paragraphe qu'une fonction bornée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable au sens de RIEMANN si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. Ce critère, dû à LEBESGUE, relie l'intégrabilité d'une fonction à la « petitesse » de l'ensemble de ses discontinuités. Il est très utile en pratique, même s'il souligne surtout le caractère très particulier des fonctions intégrables au sens de RIEMANN.

3.1. Oscillation d'une fonction. — Rappelons tout d'abord la définition de l'oscillation d'une fonction bornée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en un point $x\in[a,b]$.

DÉFINITION 2. — *Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et $x\in[a,b]$. On appelle oscillation de f au point x la borne inférieure*

$$\omega(f,x)=\inf_V\omega(f,V)$$

des oscillations $\omega(f,V)$ *de* f *sur* V *lorsque* V *parcourt l'ensemble des voisinages de* x *dans* $[a,b]$.

On vérifie aisément que $\omega(f,x)$ coïncide avec la borne inférieure des $\omega(f,[a,b]\cap I)$ lorsque I parcourt l'ensemble des intervalles ouverts contenant x.

Par définition, la fonction f est continue au point x si et seulement si $\omega(f,x)=0$. Si f possède une limite à droite $f(x+0)$ et une limite à gauche $f(x-0)$ au point $x\in\,]a,b[$, on vérifie aisément que $\omega(f,x)$ est le plus grand des trois nombres suivants : $|f(x+0)-f(x-0)|$, $|f(x)-f(x+0)|$ et $|f(x)-f(x-0)|$.

La fonction $x\to\omega(f,x)$ n'est pas continue en général. Elle est cependant toujours semi-continue supérieurement, comme nous allons le voir. Rappelons qu'une fonction réelle $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dite *semi-continue supérieurement* au point $x\in[a,b]$ s'il existe, pour tout réel $\varepsilon>0$, un voisinage V de x dans $[a,b]$ tel que :

$$y\in V\Rightarrow h(y)\le h(x)+\varepsilon\,.$$

Si h est semi-continue supérieurement en tout point $x\in[a,b]$, on dit qu'elle est semi-continue supérieurement sur $[a,b]$. On vérifie immédiatement que la semi-continuité supérieure de h sur $[a,b]$ équivaut à l'une ou l'autre des deux assertions équivalentes suivantes :

(i) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, l'ensemble des $x\in[a,b]$ tels que $h(x)<\lambda$ est ouvert dans $[a,b]$;

(ii) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, l'ensemble des $x\in[a,b]$ tels que $h(x)\ge\lambda$ est fermé (dans $[a,b]$).

Avec ces rappels, on a :

PROPOSITION 6. — *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction bornée. Alors, l'application* $x\to\omega(f,x)$ *est semi-continue supérieurement sur* $[a,b]$. *En particulier, pour tout* $\alpha\geq 0$, *l'ensemble des* $x\in[a,b]$ *tels que* $\omega(f,x)\geq\alpha$ *est fermé dans* $[a,b]$.

Il suffit de vérifier que, si $\lambda>\omega(f,x)$, il existe un voisinage V de x dans $[a,b]$ tel que $\lambda>\omega(f,y)$ quel que soit $y\in V$. Or, si $\lambda>\omega(f,x)$, il existe un voisinage W de x dans $[a,b]$ tel que $\omega(f,W)<\lambda$. Choisissons un voisinage ouvert V de x dans $[a,b]$ qui soit inclus dans W. Comme V est un voisinage de chacun de ses points, on a :

$$\omega(f,y)\leq\omega(f,V)\leq\omega(f,W)<\lambda,$$

pour tout $y\in V$, ce qui démontre que la fonction $x\to\omega(f,x)$ est semi-continue supérieurement. ■

3.2. Ensembles négligeables. — On dit qu'un sous-ensemble $N\subset\mathbb{R}$ est *négligeable* (ou de mesure nulle) s'il existe, pour tout $\varepsilon>0$, une suite d'intervalles $I_n=[a_n,b_n]$, $n\geq 1$, dont la réunion contient N et dont la somme des longueurs est inférieure ou égale à ε :

$$N\subset\cup_{n\geq 1}I_n \text{ et } \sum_{n\geq 1}b_n-a_n\leq\varepsilon.$$

On notera qu'un sous-ensemble négligeable $N\subset\mathbb{R}$ est nécessairement d'intérieur vide (s'il contenait un intervalle ouvert, ce dernier devrait être de longueur inférieur à tout $\varepsilon>0$, ce qui est absurde). Tout sous-ensemble fini de $[a,b]$ est clairement négligeable. Un sous-ensemble dénombrable de

$[a,b]$ est également négligeable en vertu de la proposition suivante :

PROPOSITION 7. — *Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Soit en effet $N_1, N_2, \ldots$ une suite d'ensembles négligeables et notons N leur réunion. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geq 1$, il existe une suite $(I_{n,k})_{k\geq 1}$ d'intervalles dont la réunion contient I_n et dont la somme des longueurs est $\leq \frac{\varepsilon}{2^n}$. Les intervalles $I_{n,k}$ $(n,k \geq 1)$ recouvrent alors N et vérifient :

$$\sum_{n,k\geq 1} |I_{n,k}| = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k\geq 1} |I_{n,k}| \right) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

où $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle I, de sorte que N est négligeable. ■

On prendra garde au fait qu'une réunion non dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas négligeable en général (sinon tout ensemble non vide de réels serait négligeable comme réunion de ses points). On notera également qu'il existe des ensembles négligeables qui ne sont pas dénombrables.

C'est par exemple le cas de l'ensemble triadique de CANTOR $K \subset [0,1]$, constitué des réels x de la forme :

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots$$

où les a_n sont tous égaux à 0 ou à 2. Cet ensemble s'obtient à partir du segment $[0,1]$ en itérant la construction qui consiste à diviser un intervalle fermé borné en trois segments égaux, et à enlever les points intérieurs à la partie du milieu. Ainsi, en retranchant de l'intervalle $[0,1]$ le segment ouvert $\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$, on obtient un sous-ensemble $K_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$ formé de deux intervalles fermés dont la somme des longueurs est égale à $\frac{2}{3}$. En appliquant la construction indiquée à chacun des intervalles de K_1, on construit alors un sous-ensemble

$$K_2 = \left[0,\tfrac{1}{3^2}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3^2},\tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{3^2}\right] \cup \left[\tfrac{8}{3^2},1\right] \subset K_1$$

qui est réunion de 4 intervalles fermés dont la somme des longueurs est égale à $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. En itérant cette construction, on met en évidence une suite de fermés emboîtés :

$$[0,1] \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \ldots$$

dont l'intersection est exactement l'ensemble de CANTOR K. Comme l'ensemble de CANTOR K est contenu dans chaque K_n, qui est une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est égale à $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, il est négligeable. En particulier, il est d'intérieur vide. Enfin, K a la puissance du continu[3], puisqu'il a même cardinal que $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$.

Une propriété $P(x)$ portant sur les points d'un segment $[a,b]$ est dite *vraie presque partout* si l'ensemble des points x où elle n'est pas vérifiée est négligeable. Ainsi, une fonction presque partout continue est une fonction dont les points de discontinuité forment un ensemble négligeable.

3.3. La caractérisation de Lebesgue. — Henri LEBESGUE a donné une caractérisation très simple des fonctions intégrables au sens de RIEMANN :

THÉORÈME 3. — *Une fonction réelle bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de* RIEMANN *si*

---

[3] Le développement dyadique « propre » d'un nombre réel compris entre 0 et 1 permet de mettre en bijection $[0,1]$ (qui a la puissance du continu) et l'ensemble formé des suites de 0 et de 1, qui a même cardinalité que $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$.

et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable.

Supposons que f soit intégrable au sens de RIEMANN et montrons que l'ensemble D des points où elle n'est pas continue est négligeable. Pour tout $\alpha > 0$, considérons l'ensemble $D_\alpha = \left\{ x \in [a,b] \mid \omega(f,x) \geq \alpha \right\}$. Comme D est la réunion des ensembles $D_{\frac{1}{n}}$ où n parcourt la suite des entiers positifs, il suffit de montrer que D_α est négligeable pour tout $\alpha > 0$. Puisque f est intégrable au sens de RIEMANN, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une subdivision

$$\sigma : a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$$

de $[a,b]$ telle que l'on ait :

$$\omega(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\omega(f,[x_{i+1},x_i]) \leq \alpha\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Montrons que $D_\alpha \setminus \left\{ x_o, x_1, \ldots, x_n \right\}$ est inclus dans une réunion d'intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ dont la somme des longueurs est $\leq \frac{\varepsilon}{2}$. Puisqu' ensemble fini de points est négligeable, on en déduira que D_α est inclus dans une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq \varepsilon$, et donc qu'il est négligeable. Notons Λ l'ensemble des entiers i tels que l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ contienne un point de $D_\alpha \setminus \left\{ x_o, x_1, \ldots, x_n \right\}$. Comme on a :

$$D_\alpha \setminus \left\{ x_o, x_1, \ldots, x_n \right\} \subset \cup_{i \in \Lambda}[x_i, x_{i+1}],$$

il suffit de montrer que la somme des longueurs des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i \in \Lambda$ est $\leq \frac{\varepsilon}{2}$. Or, pour tout $i \in \Lambda$, l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est voisinage d'un point $x \in D_\alpha$ de sorte que l'on a :

$$\omega(f,[x_i, x_{i+1}]) \geq \omega(f,x) \geq \alpha.$$

Il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{aligned}\alpha\sum_{i \in \Lambda}(x_{i+1} - x_i) &\leq \sum_{i \in \Lambda}(x_{i+1} - x_i)\omega(f,[x_{i+1},x_i]) \\ &\leq \omega(f,\sigma) \leq \alpha\tfrac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

ce qui montre que la somme $\sum_{i\in\Lambda}(x_{i+1}-x_i)$ des longueurs des intervalles $\left[x_i,x_{i+1}\right]$ pour $i\in\Lambda$ est $\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons inversement que l'ensemble D des points de discontinuité de la fonction f soit négligeable et montrons que f est intégrable au sens de RIEMANN sur $\left[a,b\right]$. Pour tout $\varepsilon>0$, posons $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{\Omega(f)+b-a}$, où $\Omega(f)=\omega(f,\left[a,b\right])$. L'ensemble $D_{\varepsilon'}$ est négligeable (car il est inclus dans D). Il peut donc être recouvert par des intervalles ouverts $I_n=\left]\alpha_n,\beta_n\right[$ dont la somme des longueurs est $\leq\varepsilon'$. Comme $D_{\varepsilon'}$ est fermé (proposition 6) et borné, il peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles I_n. Quitte à regrouper ces intervalles, on peut supposer qu'ils sont deux à deux disjoints et les noter $\left]\alpha_i,\beta_i\right[$ ($i=1,2,...,n$) avec $\beta_i<\alpha_{i+1}$. Si a appartient à $\left]\alpha_1,\beta_1\right[$, on remplacera cet intervalle par $\left[a,\beta_1\right[$, et on procédera de même pour b en remplaçant éventuellement $\left]\alpha_n,\beta_n\right[$ par $\left]\alpha_n,b\right]$. La somme des longueurs de tous ces intervalles est donc $\leq\varepsilon'$. En outre, le complémentaire F dans $\left[a,b\right]$ de la réunion de ces intervalles est un ensemble compact (c'est la réunion des intervalles $\left[\beta_i,\alpha_{i+1}\right]$). Cela étant posé, on a $\omega(f,x)<\varepsilon'$ pour tout $x\in F$. Il existe donc un voisinage $V(x)$ de x dans $\left[a,b\right]$ tel que $\omega(f,V)<\varepsilon'$. Par compacité de F, on peut le recouvrir par un nombre fini de voisinages $V(x)$, et obtenir ainsi une subdivision

$$\beta_i=y_o^i<y_1^i<...<y_{n(i)}^i=\alpha_{i+1}$$

de chaque segment $\left[\beta_i,\alpha_{i+1}\right]$ telle que l'on ait :

$$\omega(f,\left[y_j^i,y_{j+1}^i\right])\leq\varepsilon'$$

pour tout intervalle de cette subdivision. Notons alors $\sigma:a=x_o<x_1<...<x_m=b$ la subdivision de $\left[a,b\right]$ formée de tous les points α_i,β_i,y_j^i, et montrons que l'on a :

$$\omega(f,\sigma)=\sum_{j=0}^{m-1}(x_{j+1}-x_j)\omega(f,\left[x_j,x_{j+1}\right])\leq\varepsilon\ .$$

A cet effet, notons Λ l'ensemble des indices j pour lesquels l'intervalle $\left[x_j,x_{j+1}\right]$ est inclus dans F, et Λ' son complémentaire dans $\{0,1,\ldots,m-1\}$. Si $j\in\Lambda$, on a (par construction) $\omega(f,\left[x_j,x_{j+1}\right])<\varepsilon'$, et donc :

$$\sum_{j\in\Lambda}(x_{j+1}-x_j)\omega(f,\left[x_j,x_{j+1}\right])\leq\varepsilon'(b-a)\,.$$

Si $j\in\Lambda'$, on a :

$$(x_{j+1}-x_j)\omega(f,\left[x_j,x_{j+1}\right])\leq(x_{j+1}-x_j)\Omega(f)\,,$$

et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\Lambda'}(x_{j+1}-x_j)\omega(f,\left[x_j,x_{j+1}\right])&\\ &\leq\Omega(f)\sum_{j\in\Lambda'}(x_{j+1}-x_j)\\ &\leq\Omega(f)\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\leq\Omega(f)\varepsilon'\,.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\omega(f,\sigma)&=\sum_{j=0}^{m-1}(x_{j+1}-x_j)\omega(f,\left[x_j,x_{j+1}\right])\\ &\leq\varepsilon'(b-a)+\Omega(f)\varepsilon'=\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui prouve que f est intégrable au sens de RIEMANN en vertu du théorème 2. ■

COROLLAIRE 4. — *Si* $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ *est intégrable au sens de* RIEMANN*, la fonction* $|f|$ *l'est aussi et on a :*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b\left|f(x)\right|dx\ .$$

Comme la fonction $|f|$ est continue aux points où f l'est, elle est RIEMANN intégrable en vertu du théorème 3. En outre, on a $\left|S(f,\sigma,\xi)\right|\leq S(\left|f\right|,\sigma,\xi)$ pour toute subdivision riemannienne (σ,ξ) de $\left[a,b\right]$. Le corollaire s'en déduit par passage à la limite. ■

COROLLAIRE 5. — *Si* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sont intégrables au sens de* RIEMANN, *il en va de même des fonctions* $fg, Sup(f,g), Inf(f,g)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 3. ■

COROLLAIRE 6. — *Soient* $a<b<c$. *Une fonction* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *est intégrable au sens de* RIEMANN *si et seulement si elle est intégrable sur* $[a,c]$ *et sur* $[c,b]$, *et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx .$$

Nous laissons le soin au lecteur d'établir ce résultat, en utilisant le théorème 3 et en observant qu'une subdivision de $[a,c]$ et une subdivision de $[c,d]$ fournissent, par juxtaposition, une subdivision de $[a,b]$. ■

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de RIEMANN. Pour tout $\alpha\in[a,b]$, on posera par convention : $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$. Par ailleurs, si α,β sont deux points de $[a,b]$ tels que $\beta<\alpha$, on posera :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx \ .$$

Avec ces notations, la relation de CHASLES pour les intégrales :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

est vérifiée quels que soient les points $\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$.

3.4. Intégrale de Riemann et primitives. — Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de

RIEMANN sur $[a,b]$. On appelle *intégrale indéfinie* de f l'une quelconque des fonctions :

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C\ ,$$

où C est une constante réelle. Indiquons quelques propriétés de l'intégrale indéfinie.

PROPOSITION 7. — *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction intégrable au sens de* RIEMANN *sur* $[a,b]$ *et posons, pour tout* $x\in[a,b]$ *:*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ .$$

(i) F *est continue sur* $[a,b]$ *;*

(ii) F *est dérivable en tout point* x *où* f *est continue, et on a* $F'(x)=f(x)$*. En particulier,* $F'(x)=f(x)$ *pour presque tout* $x\in[a,b]$.

La propriété *(i)* résulte immédiatement de l'inégalité :

$$\left|F(x)-F(y)\right|=\left|\int_y^x f(t)dt\right|\le\|f\|_\infty\left|x-y\right|\ ,$$

où x,y sont deux points quelconques de $[a,b]$. Si f est continue au point x_o il existe, pour tout $\varepsilon>0$, un réel $\eta>0$ tel que l'on ait :

$$\left|x-x_o\right|\le\eta\Rightarrow\left|f(x)-f(x_o)\right|\le\varepsilon\ .$$

Pour $0<\left|x-x_o\right|\le\eta$, on a alors :

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}-f(x_o)\right| &= \tfrac{1}{|x-x_o|}\left|\int_{x_o}^x (f(t)-f(x_o))dt\right|\\ &\le \tfrac{1}{|x-x_o|}\,\varepsilon\left|\int_{x_o}^x dt\right|\\ &\le \tfrac{\varepsilon|x-x_o|}{|x-x_o|}=\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui prouve que F est dérivable en x_o, de dérivée :

$$F'(x_o)=f(x_o)\ .$$

Comme les discontinuités d'une fonction RIEMANN intégrable constituent un ensemble négligeable, la proposition 7 est démontrée. ■

Ainsi, pour une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable au sens de RIEMANN, la fonction $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est continue et vérifie $F'(x)=f(x)$ pour presque tout $x\in[a,b]$. La fonction F peut donc être considérée comme une primitive de f en un sens généralisé. On observera cependant que, si les fonctions $x\to F(x)+C^{ste}$ admettent $f(x)$ pour dérivée en presque tout point x, ce ne sont pas les seules fonctions continues à posséder cette propriété. En effet, on peut montrer l'existence de fonctions continues non constantes admettant presque partout une dérivée nulle. En ajoutant une telle fonction à F, on obtient une fonction continue dont la dérivée est presque partout égale à f, mais qui n'est pas égale à F à une constante près. L'intégrale de RIEMANN permet cependant d'exprimer une fonction dérivable à partir de sa dérivée, à condition que cette dernière soit bornée et presque partout continue. On a en effet :

PROPOSITION 8. — *Soit* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $[a,b]$. *Si F' est bornée et presque partout continue, on a pour tout* $x\in[a,b]$ *:*

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)dt\,.$$

En effet, la fonction $f=F'$ est RIEMANN intégrable en vertu du critère de LEBESGUE. Par ailleurs, fixons $x\in[a,b]$ et subdivisons l'intervalle $[a,b]$ en n segments $[x_i,x_{i+1}]$ de longueur $\frac{x-a}{n}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe pour tout $i = 0,1,...,n-1$ un réel $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que l'on ait :

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i).$$

On en déduit que :

$$F(x) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i),$$

d'où l'égalité désirée en faisant tendre n vers l'infini, puisque $f = F'$ est intégrable au sens de RIEMANN. ■

On notera qu'une fonction admettant une primitive au sens indiqué au chapitre I n'est pas nécessairement intégrable au sens de RIEMANN, même si elle est bornée. C'est par exemple le cas de la fonction de DIRICHLET. Par ailleurs, on peut montrer qu'il existe des fonctions $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables, mais dont la dérivée n'est pas RIEMANN intégrable. L'intégrale de RIEMANN ne peut donc pas réellement être considérée comme l'opération inverse de la dérivation[4].

EXERCICES

Pour éviter toute confusion dans ce qui suit, rappelons qu'une fonction f *admet une primitive* F *sur* $[a,b]$ *si* $F'(x) = f(x)$ *sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de valeurs de* x. *Dans ce cas, l'intégrale définie* $\int_a^x f(t)dt$ *a un sens ; c'est par définition la différence* $F(x) - F(a)$.

EXERCICE 1. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $\frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{2n-1}$ $(n = 1,2,...)$, et

[4] C'est précisément pour essayer de clarifier la question de la primitivation des fonctions bornées que LEBESGUE a introduit l'intégrale qui porte son nom.

$f(x)=0$ sinon. Montrer que f est RIEMANN intégrable sur $[0,1]$, mais qu'elle n'est pas réglée sur ce segment.

EXERCICE 2 *(Une fonction non RIEMANN intégrable, dont le module est intégrable).* On considère la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1$ si x est rationnel et $f(x)=-1$ sinon.

a) Montrer que f n'est pas RIEMANN intégrable sur $[0,1]$, mais que $|f|$ l'est.

b) Montrer que l'intégrale définie $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ a un sens pour tout $x\in[0,1]$ et donner sa valeur en fonction de x. Montrer que F est dérivable partout, mais que F' n'est pas égale à f.

EXERCICE 3 *(Une fonction réglée à ensemble de discontinuités partout dense).* Pour tout $x\geq 0$, on note (x) la différence entre x et l'entier le plus voisin. Considérons la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par[5] :

$$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{4}+\frac{(3x)}{9}+\ldots$$

a) Déterminer l'ensemble des discontinuités de f. Montrer que cet ensemble est dénombrable et partout dense dans $[0,1]$.

b) Montrer que f est réglée. En déduire que f est intégrable au sens de RIEMANN sur $[0,1]$.

EXERCICE 4 (*Une fonction RIEMANN intégrable qui n'est pas réglée*). Soit $K\subset[0,1]$ l'ensemble triadique de CANTOR. On considère la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ égale à 1 en tout point de K et à 0 sinon. Montrer que les points de discontinuité de f sont exactement les points de K. En déduire que f est RIEMANN intégrable, mais qu'elle n'est pas réglée.

---

[5] Cet exemple est dû à RIEMANN.

EXERCICE 5. Soit $K \subset [0,1]$ l'ensemble triadique de CANTOR. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose :

$$d(x,K) = Inf_{u \in K} |x-u|.$$

a) Montrer que la fonction $x \to d(x,K)$ est continue sur $[0,1]$.

b) On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x,K)$ si $x \notin K$ et $f(x) = 1$ si $x \in K$. Montrer que f est RIEMANN intégrable, mais qu'elle n'est pas réglée (on pourra montrer que K est l'ensemble des points de discontinuité de f).

EXERCICE 6. Montrer que la série de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$$

est uniformément convergente sur $[0,1]$. Calculer sa somme et montrer que l'on a :

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} + \ldots = \int_o^1 ln(1+x) \frac{dx}{x} .$$

EXERCICE 7. Montrer que, pour $0 \le r < 1$, la série de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} cos(nx) \frac{r^n}{n}$$

est uniformément convergente sur $[0,2\pi]$. En déduire que :

$$\int_o^{2\pi} ln(1 + r^2 - 2r \cos x) dx = 0 .$$

EXERCICE 8. Montrer que l'on a, pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1) .$$

(On pourra se ramener au cas où $f(1) = 0$ et majorer chacune des intégrales $\int_o^a$ et $\int_a^1$ pour un choix convenable de a) .

EXERCICE 9 *(Une limite simple des fonctions RIEMANN intégrable qui n'est pas intégrable).* On range l'ensemble des rationnels compris entre 0 et 1 en une suite $(r_1, r_2, ...)$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = 1 \text{ si } x \in \{r_1, r_2, ..., r_n\} \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

a) Montrer que les f_n sont intégrables au sens de RIEMANN sur $[0,1]$.

b) Montrer que la suite $(f_1, f_2, ...)$ est croissante et qu'elle converge en tout point vers une fonction f qui n'est pas RIEMANN intégrable sur $[0,1]$. La convergence est-elle uniforme ?

c) Montrer que la limite $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ existe, que f possède une primitive F sur $[0,1]$, mais que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq F(1) - F(0).$$

EXERCICE 10 *(Exemple d'une fonction RIEMANN intégrable avec un ensemble dense de discontinuités).* On considère la fonction périodique de période 1 définie[6] sur $\mathbb{R}$ par :

$$e(x) = x \text{ si } -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2} \text{ et } e(\pm\tfrac{1}{2}) = 0.$$

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(nx)}{n^2}$ est convergente.

b) Pour $x \in [0,1]$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(nx)}{n^2}$. Déterminer l'ensemble D des discontinuités de f. Montrer que D est dénombrable et partout dense dans $[0,1]$.

c) Montrer que f est RIEMANN intégrable sur $[0,1]$ et calculer son intégrale de RIEMANN.

EXERCICE 11 *(Une fonction dérivable à dérivée non RIEMANN intégrable).* Soit $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$ sinon.

[6] La construction est due à RIEMANN.

Montrer que F est dérivable sur $[0,1]$, mais que sa dérivée F' n'est pas RIEMANN intégrable sur $[0,1]$ (on montrera que F' n'est pas bornée).

EXERCICE 12 *(Fonction continue, à dérivée nulle presque partout mais non constante).* Soit K l'ensemble triadique de Cantor, et notons K_n le fermé obtenu lors de sa construction après avoir enlevé successivement 2^n segments ouverts de $[0,1]$. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'unique fonction continue définie en posant : *(i)* $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$; *(ii)* f_n est constante sur chaque intervalle ouvert du complémentaire de K_n et prend respectivement les valeurs $\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}$ sur ces intervalles, énumérés de la gauche vers la droite ; *(iii)* f_n est affine sur les segments fermés de K_n.

a) Montrer que les fonctions f_n sont croissantes et convergent uniformément vers une fonction continue f sur $[0,1]$.

b) Montrer que f est croissante et que $f' = 0$ sur le complémentaire de K dans $[0,1]$. En déduire l'existence de fonctions croissantes et continues sur $[0,1]$, dérivables presque partout et de dérivée nulle, mais qui ne sont pas constantes.

c) Calculer $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 xf(x)dx$.

EXERCICE 13 *(Une fonction RIEMANN intégrable qui n'admet pas de primitive).* Soit K l'ensemble triadique de Cantor, et notons K_n le fermé obtenu lors de la construction de K après avoir enlevé successivement 2^n segments ouverts de $[0,1]$. Considérons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in K$ et $f(x) = 0$ sinon.

a) Montrer que f est intégrable au sens de RIEMANN sur $[0,1]$.

On suppose désormais qu'il existe une fonction continue $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable sauf sur un ensemble dénombrable D et qui vérifie $F'(x) = f(x)$ pour $x \notin D$. On pose $G(x) = F(x) - F(0)$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $G_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'unique fonction continue définie en posant : *(i)* $G_n(0) = 0$, *(ii)* G_n est affine de pente 1 sur chaque intervalle fermé de K_n ; *(iii)* G_n est constante sur les intervalles du complémentaire de K_n.

b) Montrer que les fonctions G_n convergent uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

c) Montrer que la dérivée de $G - G_n$ est ≤ 0 sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable. En déduire que $G(x) \leq G_n(x)$ pour tout x.

d) Montrer que F est constante, et que sa dérivée ne peut pas être égale à f en dehors d'un ensemble dénombrable.

e) Déduire de ce qui précède que f n'admet pas de primitive F au sens indiqué.