Université Claude Bernard - Lyon 1
Licence "Mathématiques générales et applications"
UE Algèbre I - Structures fondamentales
Semestre automne 2014-2015

TD n°5

Exercice 1. Soit z un nombre complexe non nul tel que $z^3 = i/\bar{z}$. Montrer que le module de z est égal à 1. Calculer z.

Exercice 2. Déterminer et représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles de nombres complexes

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |1-z| \leq \frac{1}{2}\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(1-z) \leq \frac{1}{2}\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid |1-\frac{1}{z}|^2 = 2\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2\}$

Exercice 3. Calculer les racines carrées des nombres complexes

$$\text{a) } z_1 = 7 + 24i, \text{ b) } z_2 = 9 + 40i, \text{ c) } z_3 = 1 + i$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les equations suivantes

1. $z^4 + 4 = 0$
2. $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$
3. $z^5 - z = 0$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

En déduire la valeur de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On rappelle qu'il existe exactement n nombres complexes z vérifiant $z^n = 1$. Ces nombres sont appelés les n racines n-ièmes de l'unité.

1. Représenter dans le plan complexe $\mathbb{C}$ les racines 6-ièmes de l'unité et les racines 4-ièmes de l'unité.
2. On dit que ω est une **racine primitive n-ième de l'unité** si et seulement si toute racine n-ième de l'unité s'écrit comme une puissance de ω. Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, montrer que $w = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement si k est premier avec n.

Exercice 7.
1. Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$.

Exercice 8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3\theta)$ (resp. $\sin(3\theta)$) en fonction de $\cos(\theta)$ (resp. $\sin(\theta)$).

2. En utilisant la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \ a, b \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}$$

exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 9. Déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. 1. Identifier les transformations complexes suivantes :
   (a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) = z + 3 - 2i$
   (b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) = e^{\frac{i2\pi}{7}} z$
   (c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) = e^{\frac{i2\pi}{3}} z - 1$
   (d) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) = 3z - 5 + i$
   (e) $f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) = (2+2i)z + 3i$

2. Donner les applications qui représentent dans le plan complexe les transformations suivantes :
   (a) La translation de vecteur d'affixe $-2+i$.
   (b) La symétrie centrale de centre i.
   (c) La rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre 1.
   (d) L'homothétie de rapport 3 et de centre $1+2i$.
   (e) La similitude de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre $1+i$.

Exercice 11. On considère les applications f et g du plan complexe dans lui-même qui à un point M d'affixe z font correspondre les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 respectivement où

$$z_1 = i\bar{z} + 1 \ \text{ et } \ z_2 = \bar{z} + i.$$

1. Calculer les points invariants par f et g.
2. Montrer que f et g sont des isométries.
3. Donner les applications inverses de f et g.
4. Donner une interprétation géométrique des transformations f et g.

Exercice 12. On considère l'application de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto z^2$. Que deviennent par cette transformation

1. un cercle de rayon de centre $(0,0)$ et de rayon r_0 où $r_0 \in \mathbb{R}$
2. une droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$, où $\theta_0 \in \mathbb{R}$
3. la droite d'équation $\mathrm{Re}(z) = 2$

Exercice 13. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On note $D = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| \leq 1\}$ et $C = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1\}$. Montrer que l'application

$$f : D \to D, \ z \mapsto \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$$

est bien définie, que c'est une bijection et que que $f(C) = C$.