Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Math I Algèbre

CONTRÔLE FINAL

9 janvier 2015 — durée 2 h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question 1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Question 2.

1. Calculer le pgcd de 224 et 119.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $224u + 119v = \text{pgcd}(224, 119)$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions pour $x \in \mathbb{Z}$ du système

$$x \equiv 3 \mod 224 \quad \text{et} \quad x \equiv 17 \mod 119.$$

Question 3.

1. Déterminer les racines carrées de $15 + 8i$ sous forme algébrique.
2. Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, l'équation

$$z^2 + (1 - 2i)z - \frac{9}{2} - 3i = 0.$$

[Indication : $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$ et $19^2 = 361$.]

Question 4. Montrer que pour tous couple de réels (α, β) on a

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Question 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (2x - y, \frac{1}{2}y - x)$.

1. Montrer que f est une application linéaire, et donner la matrice associée en base canonique.
2. Calculer le déterminant de f. L'application f, est-elle bijective ?
3. Soit $I = \{f(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^2\}$ l'image de f. Montrer que I est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}_1 = f(1, 0)$.
4. Soit $K = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : \ f(\vec{v}) = 0\}$ le noyau de f. Montrer que K est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur $\vec{u}_2$.
5. Montrer que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$ en base canonique, puis en base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. En déduire la matrice de f en base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.