Contrôle Final Math 1 Alg̀bre
7 janvier 2013 — durée 2 h

Corrigé

Question 1. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

Solution. Pour $n = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} = \frac{2^{1+1} - 1 - 2}{2^1}.$$

Supposons l'énonce vrai pour n, et calculons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \left[\sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2\,(2^{n+1} - n - 2) + n + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{(n+1)+1} - (n+1) - 2}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

L'énoncé est donc vrai pour $n + 1$, et pour tout $n > 0$ par récurrence.

Question 2.

1. Calculer le pgcd de 225 et 123.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $225u + 123v = \operatorname{pgcd}(225, 123)$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de $225x + 123y = 9$.

Solution.

1. On a

$$\begin{aligned} 225 - \phantom{4\cdot{}}123 &= 102 \\ 123 - \phantom{4\cdot{}}102 &= 21 \\ 102 - 4 \cdot 21 &= 18 \\ 21 - \phantom{4\cdot{}}18 &= 3 \\ 18 - 6 \cdot 3 &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $\operatorname{pgcd}(225, 123) = 3$.

2. On a

$$\begin{aligned} 3 &= 21 - 18 \\ &= 21 - (102 - 4 \cdot 21) = 5 \cdot 21 - 102 \\ &= 5 \cdot (123 - 102) - 102 = 5 \cdot 123 - 6 \cdot 102 \\ &= 5 \cdot 123 - 6 \cdot (225 - 123) = 11 \cdot 123 - 6 \cdot 225 \end{aligned}$$

   Donc $225 \cdot (-6) + 123 \cdot 11 = 3$ et on peut prendre $u = -6$ et $v = 11$.

3. On a $225x + 123y = 9$ si et seulement si $75x + 41y = 3$, et $\mathrm{pgcd}(75, 41) = 1$. D'après 2. on peut prendre $x_0 = 3 \cdot (-6) = -18$ et $y_0 = 3 \cdot 11 = 33$.
   Alors (x, y) est une autre solution si et seulement si
$$75(x - x_0) + 41(y - y_0) = 0.$$
   Comme $\mathrm{pgcd}(75, 41) = 1$, ceci implique que $41 \mid x - x_0$ et $75 \mid y - y_0$. Alors $x - x_0 = 41\ell$ et $y - y_0 = -75\ell$, pour $\ell \in \mathbb{Z}$. Ainsi les solutions forment l'ensemble
$$\{(-18 + 41\ell, 33 - 75\ell) : \ell \in \mathbb{Z}\}.$$

Question 3.

1. Écrire $2i$ sous forme exponentielle, et donner l'ensemble des solutions de $z^3 = 2i$, pour $z \in \mathbb{C}$.
2. (a) Déterminer les racines carrées de $-5 + 12i$ sous forme algébrique.
   (b) Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, l'équation
$$z^2 + (-4 + i)z + 5 - 5i = 0.$$
3. Donner une équation polynomiale dont les solutions sont précisément les valeurs de z trouvées en 1. et 2(b).

Solution.

1. On a $2i = 2e^{i\pi/2}$. Donc $z^3 = 2i$ ssi $|z| = \sqrt[3]{2}$ et $3 \arg z = \{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire $\arg z = \{\frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Les trois solutions sont donc
$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3} + i), \\ z_1 &= \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5}{6}\pi} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3} + i), \quad \text{et} \\ z_2 &= \sqrt[3]{2}e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

2. (a) Si $(a + ib)^2 = -5 + 12i$, alors
$$a^2 - b^2 = -5, \qquad 2ab = 12, \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13.$$
   Donc $a^2 = \frac{13-5}{2} = 4$ et $a = \pm 2$. Ainsi $b = \frac{12}{2a} = \pm 3$, de même signe que a, et les deux racines carrées sont $\pm(2 + 3i)$.

   (b) Les deux solutions sont
$$z_{3/4} = \frac{-(-4 + i) \pm \delta}{2} = \frac{4 - i \pm \delta}{2},$$
   où
$$\delta^2 = (-4 + i)^2 - 4(5 - 5i) = 15 - 8i - 20 + 20i = -5 + 12i.$$
   D'après la partie 2.(a) on a $\delta = \pm(2 + 3i)$. Ainsi $z_3 = 3 + i$ et $z_4 = 1 - 2i$.

3. L'équation est
$$0 = (z^3 - 2i)(z^2 + (-4 + i)z + 5 - 5i) = z^5 + (-4 + i)z^4 + (5 - 5i)z^3 - 2iz^2 + (2 + 8i)z - 10 - 10i.$$

Question 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (2x - y, x + 3y)$.

1. On pose $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Donner la matrice de f^{-1} dans $(\vec{i}, \vec{j})$.
3. On pose $\vec{u} = (1, 1)$ et $\vec{v} = (0, 2)$.
   (a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
   (b) Calculer l'image du vecteur $(2, 3)$ par $f \circ g$.

Solution.

1. Soit A la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On a $f(1, 0) = (2, 1)$ et $f(0, 1) = (-1, 3)$. Donc
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. (a) $\det A = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 6 + 1 = 7 \neq 0$. Donc f est bijective.
   (b) La matrice A^{-1} de f^{-1} est $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.
3. (a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2 \neq 0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et forment une base.
   (b) $f(\vec{u}) = f(1, 1) = (1, 4) = \vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$ et $f(\vec{v}) = f(0, 2) = (-2, 6) = -2\vec{u} + 4\vec{v}$. La matrice B de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$.
4. (a) La matrice de $f \circ g$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est
$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$. L'image de $(2, 3)$ par $f \circ g$ est donc $(4, 9)$.