Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Math I Algèbre

CONTRÔLE FINAL

7 janvier 2013 — durée 2 h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question 1. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

Question 2.

1. Calculer le pgcd de 225 et 123.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $225u + 123v = \text{pgcd}(225, 123)$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de $225x + 123y = 9$.

Question 3.

1. Écrire $2i$ sous forme exponentielle, et donner l'ensemble des solutions de $z^3 = 2i$, pour $z \in \mathbb{C}$.
2. (a) Déterminer les racines carrées de $-5 + 12i$ sous forme algébrique.
   (b) Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, l'équation
   $$z^2 + (-4 + i)z + 5 - 5i = 0.$$
3. Donner une équation polynomiale dont les solutions sont précisément les valeurs de z trouvées en 1. et 2(b).

Question 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (2x - y, x + 3y)$.

1. On pose $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Donner la matrice de f^{-1} dans $(\vec{i}, \vec{j})$.
3. On pose $\vec{u} = (1, 1)$ et $\vec{v} = (0, 2)$.
   (a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
   (b) Calculer l'image du vecteur $(2, 3)$ par $f \circ g$.