5. Anneaux de polynômes

Exercice 1

1. Soient $P = 2X^3 + 4X^2 + 3X + 2$ et $G = 3X^4 + 2X + 4$ dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$. Calculer $P + G$ et PG.
2. Trouver toutes les racines dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ du polynôme $X^5 + 3X^3 + X^2 + 2X$.

Exercice 2

1. Soit A un anneau intègre. Quels sont les éléments inversibles de $A[X]$?
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[X]$?
3. Quels sont les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$?

Exercice 3 Soient A et B des anneaux et $\varphi : A \to B$ une application. On dit que φ est un morphisme d'anneaux si $\forall a, a' \in A,\ \varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$ et $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$.

1. Montrer que pour tout $b \in A$, l'application $\varphi_b : A[X] \to A$ définie par
$$\varphi_b(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n) = a_0 + a_1b + \ldots + a_nb^n$$
est un morphisme d'anneaux. C'est le morphisme **évaluation en b.**
2. Si $A = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ calculer $\varphi_2(X^2 + 3)$, $\varphi_3((X^4 + 2X)(X^3 - 3X^2 + 3))$, $\varphi_0(2X^3 - X^2 + 3X + 2)$.
3. On pose $A = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Utiliser le petit théorème de Fermat pour calculer $\varphi_3(X^{231} + 3X^{117} - 2X^{53} + 1)$.

Exercice 4

1. Calculer le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^6 + 3X^5 + 4X^2 - 3X + 2$ par $X^2 + 2X - 5$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
2. Factoriser $X^4 + 4$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ en facteurs linéaires.

Exercice 5

1. Trouver un PGCD de $X^{10} - 3X^9 + 3X^8 - 11X^7 + 11X^6 + 19X^4 - 13X^3 + 8X^2 - 9X + 3$ et $X^6 - 3X^5 + 3X^4 - 9X^3 + 5X^2 - 5X + 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Trouver une relation de Bézout pour ces deux polynômes.

Exercice 6 Soit A un anneau euclidien et v une valuation euclidienne sur A. Montrer que $v(1)$ est minimale parmi toutes les valuations des éléments de A et que $a \in A$ est inversible si et seulement si $v(a) = v(1)$.

Exercice 7 On appelle les **entiers de Gauss** l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des nombres complexes de la forme
$$\{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre.

2. Si $\alpha = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ on pose $N(\alpha) = a^2 + b^2$. Montrer que N est une valuation euclidienne. [Idée : pour α et $\beta \neq 0$ dans $\mathbb{Z}[i]$, $\frac{\alpha}{\beta} = r + si$ où $r, s \in \mathbb{Q}$. Choisisez q_1 et q_2 les entiers les plus proches de r et s et posez $q = q_1 + iq_2$.]
3. Quels sont les éléménts inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?
4. Quel est le reste de la division euclidienne de $7 + 2i$ par $3 - 4i$?
5. Calculer un PGCD de $8 + 6i$ et $5 - 15i$.

Exercice 8 On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que l'application $N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}$ définie par $N(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$ est une valuation euclidienne.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?