ou encore, puisque $\delta((x,y),(u,v)) = \mathrm{Max}\,(d(x,u), d(y,v))$ est la distance produit sur $X \times X$:

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leqq 2\,\delta((x,y),(u,v)).$$

L'uniforme continuité de l'application $(x,y) \longmapsto d(x,y)$ en découle immédiatement.

<u>2.3.8.3.</u> Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques et $k>0$. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est <u>k-lipschitzienne</u> si elle vérifie :

$$\delta(f(x), f(y)) \leqq k\,d(x,y)$$

quels que soient $x \in X$ et $y \in X$. Une application k-lipschitzienne est a fortiori uniformément continue. Par exemple, l'application $(x,y) \longmapsto d(x,y)$ considérée en 2.3.8.2 est 2-lipschitzienne. En revanche, l'application $x \longmapsto x^2$ n'est k-lipschitzienne pour aucun $k>0$, car la relation $|(2x+h)h| \leqq k|h|$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ implique $|2x+h| \leqq k$ pour tout $h \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde.

Le lecteur vérifiera sans peine, en utilisant le théorème des accroissements finis, que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée bornée est k-lipschitzienne pour un certain $k>0$.

<u>2.3.9- Homéomorphismes</u>

<u>2.3.9.1.</u> Soient X et Y deux espaces topologiques. Une fonction $f : X \to Y$ est appelée un <u>homéomorphisme</u> si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues.

Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, les ouverts de Y sont exactement les images par f des ouverts de X, comme on le vérifie aisément. L'application f permet donc d'identifier X et Y comme espaces topologiques.

<u>2.3.9.2.</u> Une fonction $f : X \to Y$ peut être continue et bijective, sans que sa réciproque f^{-1} soit continue.

Considérons par exemple les espaces métriques

$X = \mathbb{R}$, muni de la distance $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

et $Y = \mathbb{R}$, muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$.

Les ouverts de X sont tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, comme on le vérifie aisément. Notons $f = id : X \to Y$ l'application identique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est une bijection qui est continue, mais dont l'inverse f^{-1} n'est pas continue. En effet $U = [0,1]$ est un ouvert de X, mais

$$f^{-1}(U) = U$$

n'est pas un ouvert de Y.

2.3.9.3. Deux espaces topologiques X et Y sont dits *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme $f : X \to Y$. Lorsque deux espaces topologiques sont homéomorphes, toute propriété topologique vraie pour l'un est vraie pour l'autre. On peut donc les identifier comme espaces topologiques, c'est à dire les considérer comme deux représentants d'un même être topologique. Par exemple, la droite numérique achevée est homéomorphe à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De même, pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$, les lettres suivantes sont des espaces topologiques homéomorphes :

C I J L M N S U V W Z

De même, les espaces

E F T Y

sont homéomorphes entre eux, mais pas homéomorphes aux espaces de la ligne précédente.

2.4- APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

Pour étudier la continuité d'une application linéaire $T : E \to F$ d'un espace normé E dans un espace normé F, on utilise le critère suivant :

¶ **2.4.1- Proposition.** Soient E, F deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T est continue ;

(ii) T est continue en 0 ;

(iii) Il existe une constante $C \geqq 0$ telle que l'on ait :

$$\|T(x)\| \leqq C\|x\| \quad \text{quel que soit } x \in E ;$$

(iV) Il existe un voisinage V de 0 et une constante $M \geqq 0$ tels que

$$\|T(x)\| \leqq M \quad \text{quel que soit } x \in V$$

Démonstration (i) $\Rightarrow$ (ii) : trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iV) Si T est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\|x\| \leqq \eta \implies \|T(x) - T(0)\| \leqq 1.$$

Posons $V = B(0, \eta)$ et $M = 1$. Alors V est un voisinage de 0 et on a :

$$x \in V \implies \|x\| < \eta \implies \|T(x)\| \leqq 1,$$

et (iV) est démontré.

(iV) $\Rightarrow$ (iii). Supposons qu'il existe un voisinage V de 0 et une constante $M \geqq 0$ tels que l'on ait :

$$x \in V \implies \|T(x)\| \leqq M.$$

Soit $\eta > 0$ tel que $B(0, \eta] \subset V$. On a :

$$\|x\| \leqq \eta \longrightarrow \|T(x)\| \leqq M.$$

Pour $\|x\| = \eta$, on a donc :

$$\|T(x)\| \leqq M = \frac{M}{\eta}\|x\|.$$

Si $x \in E$ est non nul, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda x_1$ avec $\|x_1\| = \eta$. On a donc :

$$\|T(x)\| = \|\lambda T(x_1)\| = |\lambda|\,\|T(x_1)\| \leqq |\lambda| \frac{M}{\eta}\|x_1\|$$
$$= \frac{M}{\eta}\|\lambda x_1\| = \frac{M}{\eta}\|x\|.$$

Cette relation reste vraie pour $x = 0$, car

$T(0)=0$. Posons $C=\frac{M}{\eta}\geq 0$. Pour tout $x\in E$, on a :

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|,$$

d'où (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Si $x, y\in E$, on a :

$$\|T(x)-T(y)\| = \|T(x-y)\|,$$

et l'hypothèse (iii) implique que $\|T(x-y)\|\leq C\|x-y\|$. On a donc :

$$\|T(x)-T(y)\| \leq C\|x-y\|,$$

ce qui montre que T est C-Lipschitzienne. Il s'ensuit que T est continue, d'où (i).

La démonstration de la proposition est achevée. ■

2.4.2- Norme d'une application linéaire continue. Soient E, F deux espaces normés et notons $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

2.4.2.1- Proposition. $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications linéaires de E dans F.

Démonstration. Soient $T, S\in \mathcal{L}(E,F)$. Il existe des constantes $C\geq 0$ et $D\geq 0$ telles que :

$$\|T(x)\|\leq C\|x\| \quad \text{et} \quad \|S(x)\|\leq D\|x\|$$

quel que soit $x\in E$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\|(\lambda T+S)(x)\| &= \|\lambda T(x)+S(x)\|\\ &\leq |\lambda|\,\|T(x)\| + \|S(x)\|\\ &\leq |\lambda| C\|x\| + D\|x\|\\ &= (|\lambda| C + D)\|x\|,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\lambda T+S\in\mathcal{L}(E,F)$. Ceci démontre la proposition. ■

2.4.2.2. Soit $T\in\mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire continue de E dans F. D'après la proposition 2.4.1, il existe une constante $C\geq 0$ telle que l'on ait :

$$\| T(x) \| \leq C \|x\| \quad \text{quel que soit } x \in E.$$

Il s'ensuit que

$$\sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \| T(x) \| \leq C.$$

On pose :

$$\| T \| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \| T(x) \|.$$

On a :

2.4.2.3- Lemme. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, $\|T\|$ est la plus petite constante $C \geq 0$ telle que l'on ait :

$$\| T(x) \| \leq C \|x\| \quad \text{quel que soit } x \in E.$$

Démonstration. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$, on a :

$$\| T(x) \| \leq \| T \|.$$

Par le même argument d'homogénéité que celui utilisé en 2.4.1 pour prouver l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii), on en déduit que

$$\| T(x) \| \leq \| T \| \cdot \|x\| \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Par ailleurs, si C est une constante ≥ 0 telle que :

$$\| T(x) \| \leq C \|x\| \quad \text{quel que soit } x \in E,$$

on en déduit immédiatement que :

$$\| T \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| T(x) \| \leq C.$$

On a ainsi démontré que $\|T\|$ est la plus petite constante $C \geq 0$ telle que :

$$\| T(x) \| \leq C \|x\| \quad \text{pour tout } x \in E. \qquad \blacksquare$$

2.4.2.4. Proposition. L'application $T \longmapsto \|T\|$ est une norme sur l'espace $\mathcal{L}(E,F)$

On dit que $\|T\|$ est la norme d'opérateur (ou la norme d'application linéaire continue) de T.

Démonstration. Si $\|T\| = 0$, on a :

$$\| T(x) \| \leq 0 \|x\| = 0 \quad \text{pour tout } x \in E,$$

d'où $T \equiv 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a clairement $\| \lambda T \| = |\lambda| \cdot \|T\|$. Enfin, si $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, on a :

$$\|(T+S)(x)\| = \|T(x)+S(x)\| \leqq \|T(x)\| + \|S(x)\|$$
$$\leqq \|T\| \cdot \|x\| + \|S\| \cdot \|x\|$$
$$\leqq (\|T\| + \|S\|) \cdot \|x\|,$$

d'où l'on déduit, en vertu du lemme 2.4.2.3, que

$$\|T+S\| \leqq \|T\| + \|S\|. \quad \blacksquare$$

<u>2.4.2.5- Exemple</u>. Soit $E = \ell^1(\mathbb{N})$ l'espace des suites $x = (x_1, x_2, \dots)$ de nombres réels telles que $\sum_{n \geqq 1} |x_n| < +\infty$, muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n \geqq 1} |x_n|$. Pour toute suite bornée $a = (a_1, a_2, \dots)$ de nombres réels, la série $\sum_{n \geqq 1} a_n x_n$ est absolument convergente, donc convergente, pour tout $x \in E$. Posons :

$$T_a(x) = \sum_{n \geqq 1} a_n x_n .$$

On définit ainsi une application $T_a : E \to \mathbb{R}$, qui est clairement linéaire. Cette application linéaire est continue, car on a, pour tout $x \in E$:

$$|T_a(x)| = \Big|\sum_{n \geqq 1} a_n x_n\Big| \leqq \sum_{n \geqq 1} |a_n| \cdot |x_n|$$
$$\leqq \|a\|_\infty \sum_{n \geqq 1} |x_n| = \|a\|_\infty \|x\|_1 ,$$

où l'on a posé $\|a\|_\infty = \sup_{n \geqq 1} |a_n|$. En outre, on tire de l'inégalité ci-dessus que

$$\|T_a\| \leqq \|a\|_\infty .$$

Montrons que $\|T_a\| = \|a\|_\infty$. A cet effet, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\|a\|_\infty > 0$. Soit $\lambda > 0$ tel que $\lambda < \|a\|_\infty$. Il existe un entier $n \geqq 1$ tel que l'on ait :

$$\lambda < |a_n| \leqq \|a\|_\infty$$

Soit $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ tel que $x_i = 0$ pour $i \neq n$ et $x_n = 1$. On a : $\|x\|_1 = |x_n| = 1$. D'autre part,

$$|T_a(x)| = |a_n x_n| = |a_n| > \lambda ,$$

de sorte que $\|T_a\| \geqq |T_a(x)| > \lambda$. En faisant tendre λ vers $\|a\|_\infty$, on en déduit que $\|T_a\| \geq \|a\|_\infty$, et donc que $\|T_a\| = \|a\|_\infty$.

2.4.3 - Proposition. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, c'est à dire définissent la même topologie sur E ;

(ii) Il existe des constantes $C_1 \geq 0$ et $C_2 \geq 0$ telles que l'on ait, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \quad \text{et} \quad \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 .$$

Démonstration - La condition (i) équivaut à dire que les applications

$$id : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2) \text{ et}$$
$$id : (E, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$$

sont continues. D'après la proposition 2.4.1, c'est équivalent à l'existence de constantes $C_1 \geq 0$ et $C_2 \geq 0$ telles que l'on ait :

$$\|id(x)\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \quad \text{et}$$
$$\|id(x)\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 ,$$

d'où l'équivalence de (i) et (ii). ■

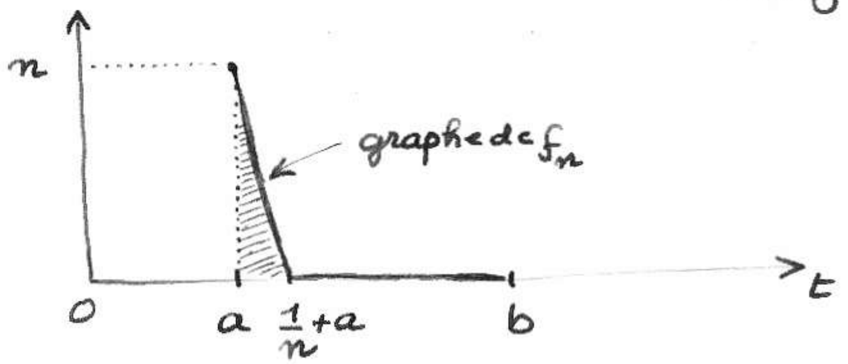
2.4.4. Exemple. Sur l'espace vectoriel $E = C([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[a,b]$, les normes

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

ne sont pas équivalentes. En effet, si ces normes étaient équivalentes, il existerait une constante $C \geq 0$ telle que l'on ait :

$$\|f\|_\infty \leq C \|f\|_1 \text{ pour toute } f \in C([a,b], \mathbb{R}).$$

Considérons la suite $(f_1, f_2, \dots)$ des fonctions de $C([a,b], \mathbb{R})$ dont le graphe est figuré ci-dessous :



On a : $\|f_n\|_\infty = n$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$, et la relation

$$\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_1 \quad \text{implique}$$

$$n \leq \frac{C}{2} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$ ce qui est

absurde. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont donc pas équivalentes. Observons ici que la relation

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$$

montre que l'application linéaire

$$id : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$$

est continue. Par conséquent, tout ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$ est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_2$.

2.4.5- Proposition - Soient E un espace normé, et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) φ est continue ;

(ii) $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.

Démonstration (i) $\Rightarrow$ (ii) Si φ est continue, $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0)$ est fermé en vertu de la proposition 2.3.2.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ soit fermé et montrons que φ est continue. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\varphi \neq 0$. Soit $x_0 \notin H$ un point tel que $\varphi(x_0) = 1$. Comme l'application $x \mapsto x_0 + x$ est un homéomorphisme de E sur lui-même, l'hyperplan affine $x_0 + H$ est fermé. Comme $0 \notin x_0 + H$, il existe $r > 0$ tel que l'on ait :

$\|x\| \leq r \Longrightarrow x \notin x_0 + H \Longrightarrow \varphi(x) \neq 1.$

Montrons que l'on a plus précisément :

$\|x\| \leq r \Longrightarrow |\varphi(x)| \leq 1.$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq r$ et $|\varphi(x)| > 1$. Posons $x_1 = \frac{x}{\varphi(x)}$; on a :

$\|x_1\| = \frac{\|x\|}{|\varphi(x)|} \leq \frac{r}{|\varphi(x)|} < r$ et ce qui précède montre que $\varphi(x_1) \neq 1$, ce qui est absurde puisque $\varphi(x_1) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$.

Ainsi, on a montré que :

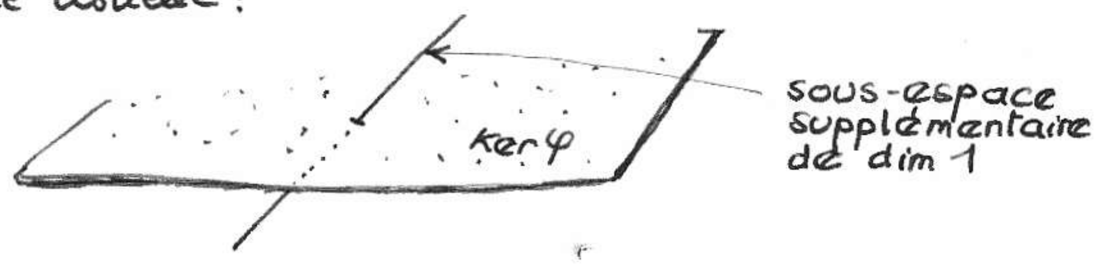
$$\|x\| \leq r \Longrightarrow |\varphi(x)| \leq 1,$$

d'où la continuité de φ en vertu de la proposition 2.4.1. ■

<u>Remarque</u>. Si une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ n'est pas continue, alors $\operatorname{Ker}\varphi$ est dense dans E. En effet, l'adhérence $\overline{\operatorname{Ker}\varphi}$ du noyau de φ est encore un sous-espace vectoriel, qui contient $\operatorname{Ker}\varphi$. Comme φ n'est pas continue, $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$ et donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-espace de codimension 1 dans E. Il s'ensuit que l'on a :

$$\overline{\operatorname{Ker}\varphi} = \operatorname{Ker}\varphi \quad \text{ou} \quad \overline{\operatorname{Ker}\varphi} = E.$$

Comme φ n'est pas continue, $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas fermé (proposition 2.4.5), et donc $\overline{\operatorname{Ker}\varphi} \neq \operatorname{Ker}\varphi$. On a donc $\overline{\operatorname{Ker}\varphi} = E$, ce qui montre que le noyau de φ est un sous-espace dense dans E. Nous verrons ci-dessous que, si E est de dimension finie, toute forme linéaire sur E est automatiquement continue. Si E est de dimension infinie, une forme linéaire sur E n'est pas automatiquement continue. Pour une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ non continue, on se méfiera de la représentation schématique de son noyau au moyen de la figure usuelle :



qui ne rend pas compte de la densité de $\ker \varphi$ dans l'espace tout entier.

2.4.6. Proposition. Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue.

Démonstration. Toute application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ peut s'écrire sous la forme

$$T(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_p(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

où $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire pour tout $i = 1, 2, \dots, p$. Pour démontrer la proposition, il suffit donc de montrer que toute forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ est continue. Ecrivons :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

où les $a_i \in \mathbb{R}$ sont les coefficients de la forme φ. Comme les applications coordonnées $x \mapsto x_i$ sont continues, l'application φ est continue. ∎

2.4.7. Exemple de forme linéaire non continue.

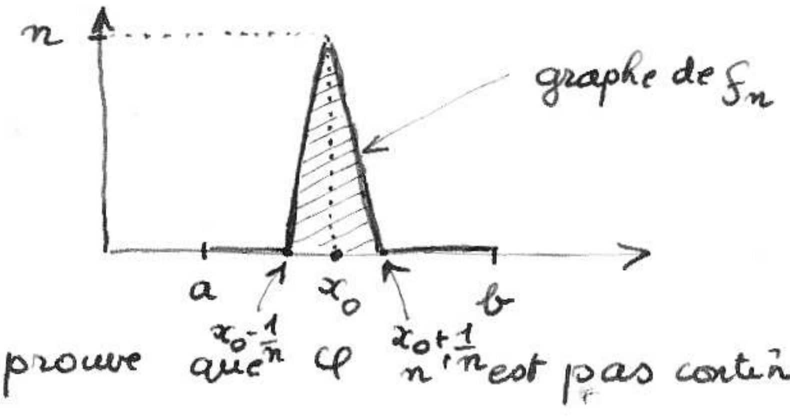
Considérons l'espace $E = C([a,b], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Fixons un point $x_0 \in]a,b[$, et considérons la forme linéaire φ sur E définie par :

$$\varphi(f) = f(x_0) \qquad (f \in E).$$

On définit ainsi une forme linéaire qui n'est pas continue. En effet, si φ était continue, il existerait une constante $C \geq 0$ telle que l'on ait :

$$(1) \quad |\varphi(f)| \leq C \|f\|_1 .$$

Mais les fonctions f_n dont le graphe est figuré ci-dessous vérifient $\varphi(f_n) = n$ et $\|f_n\|_1 = 1$, ce qui contredit (1) :



Ceci prouve que φ n'est pas continue.