d'un point constitué par les boules fermées centrées en ce point :

2.2.2- Proposition. Soient $(X,d)$, $(Y,\delta)$ deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une fonction, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ ;

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \eta > 0)$ tel que :
$$d(x,x_0) \leq \eta \Longrightarrow \delta(f(x), y_0) \leq \varepsilon \,;$$

(iii) Pour toute suite $(x_1, x_2, \dots)$ de $X$ convergeant vers $x_0$, la suite $(f(x_1), f(x_2), \dots)$ converge vers $y_0$.

Démonstration : (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $V = B_\delta(y_0, \varepsilon]$ est un voisinage de $y_0$. Il existe donc un voisinage $W$ de $x_0$ tel que :
$$x \in W \Longrightarrow f(x) \in B_\delta(y_0, \varepsilon].$$
Comme $W$ est un voisinage de $x_0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $B_d(x_0, \eta] \subset W$. On a alors :
$$d(x,x_0) \leq \eta \Rightarrow x \in B_d(x_0,\eta] \Rightarrow x \in W \Rightarrow f(x) \in B_\delta(y_0, \varepsilon]$$
$$\Longrightarrow \delta(f(x), y_0) \leq \varepsilon,$$
ce qui démontre (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $(x_1, x_2, \dots)$ une suite de $X$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse (ii), il existe $\eta > 0$ tel que :
$$d(x,x_0) \leq \eta \Longrightarrow \delta(f(x), y_0) \leq \varepsilon.$$
Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, il existe un entier $N \geq 1$ tel que :
$$n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_0) \leq \eta.$$
Il s'ensuit que l'on a :
$$n \geq N \Longrightarrow \delta(f(x_n), y_0) \leq \varepsilon,$$

ce qui procure que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Raisonnons par l'absurde. Si (i) est fausse, il existe un voisinage $V$ de $y_0$ tel que, pour tout voisinage $W$ de $x_0$, on a $f(W) \not\subset V$. Pour tout entier $n \geqq 1$, soit $W_n = B_d(x_0, \frac{1}{n})$. D'après ce qui précède, il existe $x_n \in W_n$ tel que $f(x_n) \notin V$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B_\delta(y_0, \varepsilon) \subset V$. Pour tout $n \geqq 1$, on a donc

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad , \text{car} \quad x_n \in W_n \text{ , et}$$

$$\delta(f(x_n), y_0) \geqq \varepsilon \text{ , car } \quad f(x_n) \in V^c \subset B_\delta(y_0, \varepsilon)^c.$$

Il s'ensuit que $d(x_n, x_0) \to 0$ quand $n \to +\infty$, et la suite $(x_1, x_2, \ldots)$ converge vers $x_0$. D'après l'hypothèse (iii), on a $f(x_n) \to y_0$ quand $n \to +\infty$, i.e.

$$\delta(f(x_n), y_0) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Or ceci contredit la relation

$$\delta(f(x_n), y_0) \geqq \varepsilon > 0 \quad \text{pour tout } n \geqq 1.$$

On a ainsi montré par l'absurde que (iii) $\Longrightarrow$ (i). ∎

Pour étudier les limites de fonctions à valeurs dans un produit d'espaces topologiques, on utilisera la proposition suivante :

2.2.3 - Proposition. Soient $X$ un espace topologique et $Y = \prod_{\alpha\in\Omega} Y_\alpha$ un produit d'espaces topologiques $Y_\alpha$ $(\alpha \in \Omega)$, muni de la topologie produit. Soit $f : X \to Y$ une application et notons $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ l'application définie pour tout $\alpha \in \Omega$ par :

$$f(x) = (f_\alpha(x))_\alpha \quad \text{quel que soit } x \in X.$$

Soient enfin $x_0 \in X$ et $b = (b_\alpha)_\alpha \in Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ ;

(ii) Pour tout $\alpha \in \Omega$, on a $\lim_{x\to x_0} f_\alpha(x) = b_\alpha$.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, et fixons $\alpha \in \Omega$. Soit $V$ un voisinage de $b_\alpha$ dans $Y_\alpha$. Comme $\tilde{V} = V \times \prod_{\beta \neq \alpha} Y_\beta$ est un voisinage de $b$ pour la topologie produit sur $Y$ et que $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, il existe un voisinage $W$ de $x_0$ dans $X$ tel que l'on ait :

$$x \in W \Longrightarrow f(x) = (f_\beta(x))_\beta \in \tilde{V} \Longrightarrow f_\alpha(x) \in V.$$

Ceci montre que $\lim_{x \to x_0} f_\alpha(x) = b_\alpha$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que (ii) soit vérifiée, et montrons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$. Soit $V$ un voisinage de $b$ dans $Y$. Par définition de la topologie produit, il existe un sous-ensemble fini $F$ de $\Omega$ et, pour tout $\alpha \in F$, un voisinage $V_\alpha$ de $b_\alpha$, tels que :

$$\prod_{\alpha \in F} V_\alpha \times \prod_{\alpha \notin F} Y_\alpha \subset V.$$

Pour tout $\alpha \in F$, l'hypothèse (ii) implique l'existence d'un voisinage $W_\alpha$ de $x_0$ dans $X$ tel que l'on ait :

$$x \in W_\alpha \Longrightarrow f_\alpha(x) \in V_\alpha .$$

Soit $W = \bigcap_{\alpha \in F} W_\alpha$. On définit ainsi un voisinage $W$ de $x_0$ dans $X$, qui vérifie :

$$\begin{aligned} x \in W &\Longrightarrow (\forall \alpha \in F),\ f_\alpha(x) \in V_\alpha \\ &\Longrightarrow f(x) \in \prod_{\alpha \in F} V_\alpha \times \prod_{\alpha \notin F} Y_\alpha \subset V. \end{aligned}$$

Il existe ainsi, pour tout voisinage $V$ de $b$ dans $Y$, un voisinage $W$ de $x_0$ dans $X$ tel que :

$$x \in W \Longrightarrow f(x) \in V,$$

ce qui prouve que $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$.

■

<u>2.2.4. Remarque</u>. La démonstration de la proposition 2.2.3 s'adapte aisément pour montrer qu'une suite

$(x_1, x_2, \dots)$ d'un espace topologique produit $X = \prod_{\alpha \in \Omega} X_\alpha$ converge vers $a = (a_\alpha)_\alpha \in X$ si et seulement si l'on a, pour tout $\alpha \in \Omega$,

$$x_{n,\alpha} \longrightarrow a_\alpha \text{ quand } n \to +\infty,$$

où l'on a posé $x_n = (x_{n,\alpha})_\alpha$.

## 2.3- FONCTIONS CONTINUES

2.3.1- Définitions. Soient $X$, $Y$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une fonction de $X$ dans $Y$. On dit que $f$ est continue au point $x_0 \in X$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Si $f$ est continue en tout point $x \in X$, on dit que $f$ est continue sur $X$.

Une fonction $f : X \to Y$ est donc continue au point $x_0$ s'il existe, pour tout voisinage $V$ de $f(x_0)$, un voisinage $W$ de $x_0$ tel que $f(W) \subset V$.

Si $(X, d)$ et $(Y, \delta)$ sont des espaces métriques, la fonction $f : X \to Y$ est continue au point $x_0$ s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ (dépendant en général de $x_0$) tel que l'on ait :

$$d(x, x_0) \leq \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon .$$

Cela résulte immédiatement de la proposition 2.2.2, qui implique également que la continuité de $f$ au point $x_0$ équivaut à dire que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

pour toute suite $(x_1, x_2, \dots)$ de $X$ telle que $d(x_n, x_0) \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

¶ 2.3.2- Proposition. Soient $X$, $Y$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une fonction de $X$ dans $Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ est continue ;

(ii) Pour tout sous-ensemble ouvert $U$ de $Y$, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $X$ ;

(iii) Pour tout sous-ensemble fermé $F$ de $Y$, $f^{-1}(F)$ est fermé dans $X$ ;

(iV) Pour toute partie $A$ de $X$, on a :

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons que $f$ soit continue et soit $U$ un ouvert de $Y$. Pour montrer que $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $X$, nous allons montrer qu'il est voisinage de chacun de ses points. Soit donc $x_0 \in f^{-1}(U)$ ; alors $f(x_0) \in U$ et $U$ est un voisinage de $f(x_0)$. Par continuité de $f$ au point $x_0$, il existe un voisinage $V$ de $x_0$ dans $X$ tel que $f(V) \subset U$. Mais alors, on a :

$$V \subset f^{-1}(U),$$

et $f^{-1}(U)$ est un voisinage de $x_0$, d'où (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Soit $F$ un sous-ensemble fermé de $Y$. Alors $U = F^c$ est ouvert, et l'hypothèse (ii) implique que $f^{-1}(U)$ est ouvert. Mais alors,

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(F^c)^c = f^{-1}(U)^c$$

est fermé, d'où (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (iV). Pour toute partie $A$ de $X$, on a :

$$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

et $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est fermé d'après l'hypothèse (iii). On a donc

$$\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}),$$

d'où

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)},$$

ce qui prouve (iV).

(iV) $\Longrightarrow$ (i). Soit $x_0 \in X$ et montrons que $f$ est continue au point $x_0$. Soit $V$ un voisinage de $f(x_0)$. Il existe un ouvert $U$ de $Y$ contenant $f(x_0)$ et tel que $U \subset V$. Montrons que $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $X$. A cet effet, il suffit de montrer que $f^{-1}(F)$ est fermé dans $X$, où $F = U^c$.

Posons $G = f^{-1}(F)$ ; on a $f(G) \subset F$ d'où, puisque $F$ est fermé, $\overline{f(G)} \subset \overline{F} = F$. D'après l'hypothèse (iv), on a $f(\overline{G}) \subset \overline{f(G)} \subset F$, d'où $\overline{G} \subset f^{-1}(F) = G$. Comme $G \subset \overline{G}$, on en déduit que $\overline{G} = G$, i.e. que $G$ est fermé. Il s'ensuit que $f^{-1}(U)$ est bien ouvert dans $X$. Posons $W = f^{-1}(U)$. On définit ainsi un ouvert contenant $x_0$, c'est à dire un voisinage de $x_0$ dans $X$. Comme $f(W) \subset U \subset V$, on a :

$$x \in W \Longrightarrow f(x) \in V,$$

ce qui prouve la continuité de $f$ au point $x_0$. ■

**2.3.3- Corollaire.** Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ une famille d'espaces topologiques, et munissons $X = \prod_{\alpha\in\Omega} X_\alpha$ de la topologie produit. Alors, pour tout $\alpha \in \Omega$, l'application $p_\alpha : X \to X_\alpha$ définie par :

$$p_\alpha((x_\beta)_\beta) = x_\alpha$$

est continue.

Démonstration. Pour tout ouvert $U$ de $X_\alpha$, on a :

$$p_\alpha^{-1}(U) = U \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta,$$

et par conséquent $p_\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert élémentaire pour la topologie produit. D'après la proposition 2.3.2 (ii), l'application $p_\alpha$ est continue. ■

Pour établir la continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit, on utilisera le résultat suivant :

**2.3.4- Proposition.** Soient $X$ un espace topologique et $Y = \prod_{\alpha\in\Omega} Y_\alpha$ un produit d'espaces topologiques $Y_\alpha$ ($\alpha \in \Omega$), muni de la topologie produit. Soit $f : X \to Y$ une application de $X$ dans $Y$ et notons $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ l'application $p_\alpha \circ f$, où $p_\alpha(x) = x_\alpha$. Soit $x_0 \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ est continue au point $x_0$ ;

(ii) Pour tout $\alpha \in \Omega$, $f_\alpha$ est continue au point $x_0$.

Démonstration. La proposition résulte immédiatement de la définition de la continuité de $f$ en un point et de la proposition 2.2.3. ■

La proposition suivante, bien que très facile à démontrer, est fondamentale.

¶ 2.3.5 - Proposition. Soient $X, Y, Z$ trois espaces topologiques et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ des applications de $X$ dans $Y$ et de $Y$ dans $Z$.

(i) Si $f$ est continue au point $x_0 \in X$, et si $g$ est continue au point $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en $x_0$;

(ii) Si $f$ et $g$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Démonstration (i) Observons tout d'abord que la continuité d'une fonction $f : X \to Y$ au point $x_0$ équivaut à dire que, pour tout voisinage $V$ de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $x_0$. Dès lors, soit $V$ un voisinage de $g(f(x_0))$ et montrons que $(g \circ f)^{-1}(V)$ est un voisinage de $x_0$, ce qui établira (i). Or on a :

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

et $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(x_0)$, car $g$ est continue en $x_0$, de sorte que la continuité de $f$ en $x_0$ implique que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ est un voisinage de $x_0$. Ainsi, $(g \circ f)^{-1}(V)$ est un voisinage de $x_0$, et (i) est démontré.

(ii) Résulte immédiatement de (i). ■

## 2.3.6 - Continuité de la restriction à un sous-espace.

2.3.6.1 - Topologie induite. Soient $X$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$. On vérifie immédiatement que la famille des parties de $A$ de la forme $U \cap A$, où $U$ est un ouvert de $X$, constitue une topologie sur $A$ que l'on appelle topologie induite par celle de $X$. Si $(X, d)$ est un espace métrique, on vérifie immédiatement que la distance sur $A$ définie par :

$$d_A(x, y) = d(x, y) \qquad (x, y \in A)$$

munit $A$ d'une topologie qui est la topologie induite par celle de $X$.

<u>2.3.6.2 - Proposition. Soit $f : X \to Y$ une application d'un espace topologique $X$ dans un espace topologique $Y$, et $A$ une partie de $X$. On munit $A$ de la topologie induite, et on note $f_A : A \to Y$ la restriction de $f$ à $A$. Alors, si $f$ est continue en un point $x_0 \in A$, sa restriction $f_A$ est continue en $x_0$.</u>

<u>Démonstration</u>. Considérons l'injection canonique $i_A : A \to X$ définie par $i_A(x) = x$ $(x \in A)$. Pour tout ouvert $U$ de $X$, $i_A^{-1}(U) = A \cap U$ est un ouvert de $A$ pour la topologie induite, de sorte que $i_A$ est continue. La proposition résulte alors de 2.3.5 et de la relation

$$f_A = f \circ i_A . \quad \blacksquare$$

<u>2.3.6.3</u>. Soit $f : X \times Y \to Z$ une application d'un produit $X \times Y$ d'espaces topologiques dans un espace topologique $Z$. Pour tout $y \in Y$ fixé, notons $f_y : X \to Z$ l'application définie par

$$f_y(x) = f(x, y).$$

De même, pour tout $x \in X$ fixé, notons $f_x : Y \to Z$ l'application définie par :

$$f_x(y) = f(x, y).$$

On dit que $f_x$ et $f_y$ sont les <u>applications partielles</u> associées à $f$.

Identifions $X$ à $X \times \{y\}$ ; alors la topologie de $X$ s'identifie à la topologie induite par celle de $X \times Y$ sur $X \times \{y\}$. Il résulte alors de 2.3.6.2 que, si $f$ est continue, l'application partielle $f_x$ est continue. De même, l'application partielle $f_y$ est continue pour tout $y \in Y$.

On notera qu'il existe des applications $f : X \times Y \to Z$ dont toutes les applications partielles $f_x$, $f_y$ sont continues, mais qui ne sont pas continues.

Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

n'est pas continue à l'origine car tout voisinage de $(0,0)$ contient des points de la forme $(a,a)$ pour lesquels $f(a,a) = \frac{1}{2}$. Pourtant, $f_x$ et $f_y$ sont des fonctions continues quels que soient $x$ et $y$ réels.

## 2.3.7 - Quelques résultats utiles sur les fonctions continues.

2.3.7.1. Soit $f : X \to Y$ une fonction continue d'un espace topologique $X$ dans un espace topologique $Y$. Si $(x_1, x_2, \dots)$ est une suite de points de $X$ qui converge vers $x \in X$, alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

2.3.7.2. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un espace topologique $X$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors,

$\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$ est un fermé de $X$, et

$\{x \in X \mid f(x) > a\}$ est un ouvert de $X$.

Cela résulte immédiatement de la proposition 2.3.2.

2.3.7.3. Soient $f, g : X \to Y$ deux fonctions continues d'un espace topologique $X$ dans un espace topologique séparé $Y$. On suppose que $f(x) = g(x)$ pour tout $x$ d'un sous-ensemble $A$ dense dans $X$. Alors $f = g$.

Ce résultat est parfois appelé le « principe de prolongement des identités ».

Démonstration. Posons $F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Montrons tout d'abord que $F$ est fermé dans $X$. A cet effet, notons $\Delta = \{(y,y) \mid y \in Y\}$ la diagonale de $Y \times Y$. L'ensemble $\Delta$ est fermé dans $Y \times Y$. Montrons en effet que son complémentaire est ouvert dans $Y \times Y$. Soit $(y_1, y_2) \in \Delta^c$. On a $y_1 \neq y_2$, et comme $Y$ est séparé, il existe un ouvert $U_1$ contenant $y_1$ et un ouvert $U_2$ contenant $y_2$ tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. L'ensemble $U_1 \times U_2$ est alors un ouvert de $Y \times Y$ qui contient $(y_1, y_2)$ et qui est inclus dans $\Delta^c$ à cause de la relation $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Il s'ensuit que $\Delta^c$ est ouvert dans $Y\times Y$, et donc que $\Delta$ est fermé dans $Y\times Y$. Soit alors $h: X \to Y\times Y$ l'application définie par :

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

Comme $f$ et $g$ sont continues, $h$ est continue en vertu de 2.3.4. Mais alors,

$$F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = h^{-1}(\Delta)$$

est fermé en vertu de 2.3.2. Par hypothèse, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, ce qui signifie que $A \subset F$. Comme $F$ est fermé, on en déduit que $\bar{A} \subset F$. Or $\bar{A} = X$, puisque $A$ est supposé dense dans $X$. On a donc $X \subset F$ et par conséquent $X = F$, ce qui signifie que $f = g$. ∎

## 2.3.8- Fonctions uniformément continues

2.3.8.1. Soient $(X, d)$ et $(Y, \delta)$ deux espaces métriques. On dit qu'une application $f: X \to Y$ est *uniformément continue* s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ tel que l'on ait :

$$d(x,y) \leqq \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) \leqq \varepsilon.$$

Une fonction uniformément continue est a fortiori continue (cf. les remarques suivant la définition 2.3.1). La réciproque n'est pas vraie en général. Ainsi, la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue, mais elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ puisque la différence

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = (2x+h)h$$

peut prendre, pour tout $h$ fixé, des valeurs arbitrairement grandes.

2.3.8.2. Soit $(X, d)$ un espace métrique. Alors, l'application $X\times X \ni (x,y) \longmapsto d(x,y) \in \mathbb{R}$ est uniformément continue. En effet, on a :

$$\begin{aligned} |d(x,y) - d(u,v)| &= |d(x,y) - d(x,v) + d(x,v) - d(u,v)| \\ &\leqq |d(x,y) - d(x,v)| + |d(x,v) - d(u,v)| \\ &\leqq d(y,v) + d(x,u) \leqq 2\,\mathrm{Max}\,(d(x,u), d(y,v)), \end{aligned}$$