(ii) Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que l'on ait :

$$B_{d_2}(x,\rho) \subset B_{d_1}(x,r) \text{ et } B_{d_1}(x,\rho) \subset B_{d_2}(x,r).$$

Démonstration. Elle résulte immédiatement de ce qui précède. ■

1.3.5.3. Exemples. Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble X et supposons qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ telles que :

$$C_1 d_1(x,y) \leqq d_2(x,y) \leqq C_2 d_1(x,y)$$

quels que soient $x, y \in X$. On dit parfois que d_1 et d_2 sont quasi-isométriques. Alors, d_1 et d_2 sont équivalentes en vertu de 1.3.5.2.

Soit (X,d) un espace métrique. Alors, la distance

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

est équivalente à d, comme on le vérifie aisément. Il s'ensuit que toute distance d est équivalente à une distance δ qui vérifie :

$$\delta(x,y) \leqq 1 \quad \text{quels que soient } x,y \in X.$$

Sur $\mathbb{R}$, les distances $d(x,y) = |x-y|$ et

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

ne sont pas équivalentes, comme on le vérifie aisément.

1.4- ESPACES NORMÉS

1.4.1- Définition. On appelle espace normé un espace vectoriel E (supposé ici réel) muni d'une norme, c'est à dire d'une application $x \in E \longmapsto \|x\| \in [0,+\infty[$

qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$;
(iii) $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ quels que soient $x, y \in E$.

Comme en 1.1.2, on vérifie que les conditions (ii) et (iii) impliquent l'inégalité :

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqq \|x-y\| \quad \text{quels que soient } x, y \in E.$$

1.4.2- Exemples

1.4.2.1. Sur $\mathbb{R}^n$, les normes

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,,$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{1 \leqq i \leqq n} |x_i| \qquad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

définissent des structures d'espace normé.

1.4.2.2. Sur l'espace $E = C([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur le segment fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, les normes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

définissent des structures d'espace normé.

1.4.2.3. L'espace $c_0 = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}$ est un espace normé pour la norme

$$\|x\| = \sup_{n \geqq 1} |x_n|.$$

1.4.2.4. L'espace $\ell^1 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n \geq 1} |x_n| < +\infty\}$ est un espace normé pour la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{n \geq 1} |x_n|.$$

1.4.3- Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour $x, y \in E$, posons :

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

On définit ainsi une distance sur E qui vérifie :

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad \text{quels que soient } x, y, z \in E;$$
$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y) \quad \text{quels que soient } x, y \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un espace normé est donc automatiquement muni d'une structure d'espace métrique ; en particulier, c'est un espace topologique.

D'après 1.2.4, toute partie A d'un espace métrique $(E, \|\cdot\|)$ est munie d'une structure d'espace métrique pour la distance

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad (x, y \in A).$$

Les espaces métriques ainsi construits sont presque «génériques». En effet, un théorème célèbre de BANACH-MAZUR affirme que tout espace métrique séparable (cf. 1.3.4.6) est isométrique à une partie de l'espace vectoriel normé $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. En d'autres termes, il existe pour tout espace métrique(*) (X, d) une injection $x \in X \longmapsto f_x \in C([0,1], \mathbb{R})$ telle que l'on ait :

$$d(x,y) = \|f_x - f_y\|_\infty \quad \text{quels que soient } x, y \in X$$

(*) séparable

1.4.4- Espaces préhilbertiens

1.4.4.1. Soit E un espace vectoriel réel. On appelle produit scalaire sur E une application

$$(x,y)\in E\times E \longmapsto \langle x|y\rangle \in \mathbb{R}$$

qui vérifie :

(i) $\langle x|x\rangle \geqq 0$ et $\langle x|x\rangle = 0 \iff x=0$;
(ii) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ quels que soient $x,y\in E$;
(iii) $x\longmapsto \langle x|y\rangle$ est une application linéaire pour tout y fixé

Des relations (ii) et (iii), on tire immédiatement que l'application

$$(x,y)\longmapsto \langle x|y\rangle$$

est une forme bilinéaire. Pour tout $x\in E$, on pose :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

1.4.4.2- Définition. On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot|\cdot\rangle$.

Par exemple, $E=\mathbb{R}^n$ est un espace préhilbertien lorsqu'on le munit du produit scalaire

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)).$$

Sur $E = C([a,b],\mathbb{R})$, le produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

définit une structure d'espace préhilbertien.

Désignons par ℓ^2 l'espace des suites $x=(x_1,x_2,\dots)$ de nombres réels telles que $\sum_{n\geqq 1} |x_n|^2 < +\infty$. Si $x,y\in \ell^2$, alors la relation

$$|x_n y_n| \leqq \frac{|x_n|^2+|y_n|^2}{2}$$

montre que la série $\sum_{n\geq 1} x_n y_n$ est absolument convergente, donc elle est convergente. Posons

$$\langle x|y\rangle = \sum_{n\geq 1} x_n y_n .$$

On définit ainsi un produit scalaire sur l^2, qui est donc un espace préhilbertien.

1.4.4.3 - Inégalité de Cauchy - Schwarz

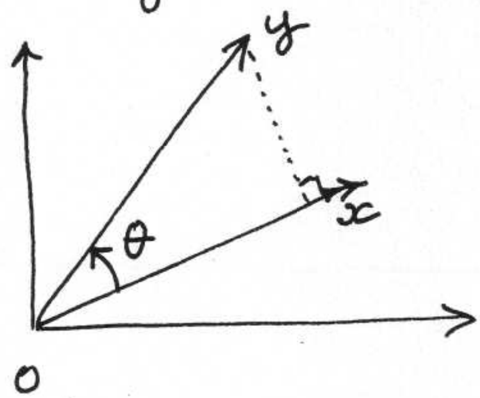
Sur $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire usuel

$$\langle x|y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

s'écrit également :

$$\langle x|y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos\theta ,$$

où θ est l'angle entre les vecteurs x et y.



En particulier, on a :

$$|\langle x|y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \, |\cos\theta| \leqq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Cette inégalité s'étend sans peine à tout espace préhilbertien :

Proposition. Soit E un espace préhilbertien, et notons $(x,y) \longmapsto \langle x|y\rangle$ son produit scalaire. Quels que soient $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x|y\rangle| \leqq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Démonstration. On peut supposer, sans perte de généralité, que $x \neq 0$, $y \neq 0$, et que $\langle x|y\rangle \geqq 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqq \|x+\lambda y\|^2 &= \langle x+\lambda y | x+\lambda y\rangle \\ &= \langle x|x\rangle + \lambda\langle x|y\rangle + \lambda\langle y|x\rangle + \lambda^2\langle y|y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Le pôlynôme du second degré

$$P(\lambda) = \|y\|^2\lambda^2 + 2\langle x|y\rangle\lambda + \|x\|^2$$

est ainsi positif ou nul quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui implique que son discriminant est négatif ou nul, soit :

$$4\langle x|y\rangle^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leqq 0$$

i.e.

$$\langle x|y\rangle^2 \leqq \|x\|^2\|y\|^2.$$

En prenant les racines carrées, sachant que $\langle x|y\rangle \geqq 0$ et donc que $\langle x|y\rangle = |\langle x|y\rangle|$, on obtient :

$$|\langle x|y\rangle| \leqq \|x\|.\|y\|. \quad \blacksquare$$

Par exemple, si f, g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles, on a :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}\,.\,\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales).
De même, si $x = (x_1, x_2, \ldots)$ et $y = (x_1, x_2, \ldots)$ sont deux séries à termes réels de carré sommable, on a :

$$\sum_{n\geqq 1} x_n y_n \leqq \sqrt{\sum_{n\geqq 1} x_n^2}\,.\,\sqrt{\sum_{n\geqq 1} y_n^2}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz pour les séries).

<u>1.4.4.4- Proposition</u>. <u>Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors, l'application $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ définit une norme sur E, appelée norme associée au produit scalaire.</u>

<u>Démonstration</u>. Le seul point non trivial est la vérification de l'inégalité triangulaire. Soient