5.4.4- Théorème. *Soient E un espace normé et U un ouvert de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *U est connexe ;*

(ii) *U est connexe par arcs ;*

(iii) *Deux points quelconques a, b de U peuvent être joints par une ligne polygônale contenue dans U.*

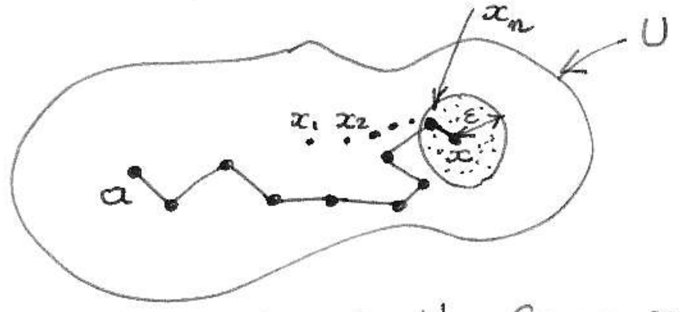
Démonstration. (iii) $\Rightarrow$ (ii) est évident. (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte du théorème 5.4.3. Il nous reste donc à démontrer (i) $\Rightarrow$ (iii). A cet effet, fixons un point $a \in U$ et considérons le sous-ensemble $A \subset U$ défini par :

$$A = \{x \in U \mid \text{Il existe une ligne polygônale d'origine } a \text{ et d'extrémité } x \text{ qui est contenue dans } U\}.$$

Comme $a \in A$, la partie A est non vide. Montrons que A est ouverte. Soit $x \in A$. Comme $x \in U$ et que U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Montrons que $B(x,\varepsilon) \subset A$, ce qui prouvera que A est ouvert. Pour tout $y \in B(x,\varepsilon)$, le segment $[x,y]$ est contenu dans $B(x,\varepsilon)$, donc contenu dans U. Comme $x \in A$, il existe une ligne polygônale $[a,a_1] \cup \cdots \cup [a_{n-1},x]$ contenue dans U, d'origine a et d'extrémité x. Mais alors,

$$[a,a_1] \cup \cdots \cup [a_{n-1},x] \cup [x,y]$$

est une ligne polygônale d'origine a et d'extrémité y qui est contenue dans U, de sorte que $y \in A$. Nous avons donc $B(x,\varepsilon) \subset A$, et A est ouvert dans U. Montrons de même que A est fermé dans U. A cet effet, soit $(x_1, x_2, \dots)$ une suite de points de A convergeant vers un point $x \in U$, et montrons que $x \in A$.



Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Comme $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x_n \in B(x,\varepsilon)$. Comme $x_n \in A$, il existe une ligne polygônale contenue dans U et qui relie a à x_n ; en complétant cette ligne polygônale par le segment $[x_n, x]$ qui est contenu dans $B(x,\varepsilon) \subset U$, on obtient une ligne polygonale joignant a à x et contenue dans U, ce qui prouve que $x \in A$. Ainsi, A est non vide, ouvert et fermé ; comme U est connexe, on a $A = U$. Ceci démontre (iii) et achève la preuve de (i) $\Rightarrow$ (iii). ■

5.4.5- Corollaire. Soient U un ouvert d'un espace normé E, et $f : U \longrightarrow F$ une fonction différentiable sur U et à valeurs dans un espace normé F. On suppose que $Df = 0$ et que U est connexe. Alors, f est constante sur U.

Démonstration. Fixons $a \in U$ et montrons que $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in U$. D'après le théorème 5.4.4, il existe une ligne polygonale contenue dans U :

$$[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n]$$

d'origine $a_0 = a$ et d'extrémité $a_n = x$. Montrons que l'on a, pour tout i, $f(a_i) = f(a_{i+1})$. A cet effet, considérons la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\varphi_i(t) = f((1-t)a_i + t a_{i+1}).$$

Cette fonction est dérivable sur $]0,1[$ et continue sur $[0,1]$; en outre, elle vérifie :

$$\varphi_i'(t) = Df((1-t)a_i + t a_{i+1})(a_{i+1} - a_i) = 0,$$

et le théorème de la moyenne implique que φ_i est constante sur $[0,1]$, d'où

$$f(a_i) = \varphi_i(0) = \varphi_i(1) = f(a_{i+1}).$$

Il s'ensuit que $f(x) = f(a_{n-1}) = f(a_{n-2}) = \cdots = f(a_0) = f(a)$, ce qui prouve que f est constante. ■

5.5. COMPOSANTES CONNEXES

5.5.1- Théorème-Définition. Soient X un espace topologique et $x \in X$. Parmi les parties connexes de X contenant x, il en existe une plus grande que toutes les autres, que l'on appelle la composante connexe de x dans X.

Démonstration. La partie $\{x\}$ est un connexe qui contient x.

Notons $C(x)$ la réunion de toutes les parties connexes de X qui contiennent x. D'après le théorème 5.2.3, $C(x)$ est une partie connexe. Elle contient x, et est évidemment la plus grande de toutes les parties connexes de X contenant x. ■

5.5.2 - Théorème. Soit X un espace topologique.

(i) La composante connexe de tout point de X est fermée dans X;

(ii) les composantes connexes distinctes de X forment une partition de X en sous-ensembles fermés.

Démonstration. (i) Soit $C(x)$ la composante connexe du point x. D'après le théorème 5.2.2, l'adhérence $\overline{C(x)}$ de $C(x)$ est un connexe, qui contient x. On a donc :

$$\overline{C(x)} \subset C(x),$$

d'où $C(x) = \overline{C(x)}$.

(ii) Soient $C(x)$ et $C(y)$ les composantes connexes de x et y. Si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, alors $C(x) = C(y)$. En effet, d'après le théorème 5.2.3, $C(x) \cup C(y)$ est un connexe qui contient x, d'où

$$C(x) \cup C(y) \subset C(x)$$

et donc $C(x) = C(x) \cup C(y)$. De même, $C(x) \cup C(y) \subset C(y)$, et donc $C(y) = C(x) \cup C(y)$. On a donc $C(x) = C(y)$. Il s'ensuit que les composantes connexes distinctes de X sont disjointes, et que leur réunion est égale à la réunion de toutes les composantes connexes de X, c'est à dire à X lui-même. ■

5.5.3 - Application à des critères de non homéomorphisme

Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme d'un espace topologique X sur un espace topologique Y. Il résulte immédiatement du théorème 5.2.1 que l'on a, pour tout $x \in X$:

$$f(C(x)) = C(f(x)),$$

de sorte que f échange les composantes connexes distinctes de X et de Y. En particulier, le « nombre » de composantes connexes distinctes de X est égal à celui de Y.

Appliquons ceci à la recherche des types d'isomorphisme des lettres (fermées) de l'alphabet des capitales romaines

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Il est facile de voir que les lettres suivantes sont toutes homéomorphes à la lettre I :

C G I J L M N S U V W Z

On peut en effet se faire une assez bonne idée de l'homéomorphie de deux lettres comme une déformation de l'une sur l'autre par étirement et compression, sans déchirure ni pliage, ni collage.

Il est également facile de voir que les lettres suivantes sont homéomorphes :

E F T Y

En revanche, ces dernières ne sont pas homéomorphes à l'une des lettres du premier groupe, car T n'est pas homéomorphe à I. En effet, si T était homéomorphe à I, la partie obtenue en privant T du point à l'intersection des deux barres du T serait homéomorphe à I privé d'un point. On aurait donc

ce qui est absurde puisque a 3 composantes connexes, alors que en a 2 et une seule.

On voit de même que

D O

sont des lettres homéomorphes. Mais O n'est pas homéomorphe à I, car I privé de son milieu est une partie à 2 composantes connexes, alors que O privé d'un point est connexe. Pour la même raison, O n'est pas homéomorphe à T

Mais il est temps de clore ce cours, et nous laisserons au lecteur le soin d'achever cette classification à homéomorphisme près des capitales romaines.