Université Claude Bernard Lyon I. Année universitaire 2010-2011
Licence STS, UE MAT 3001L (Topologie Générale)

Corrigé du contrôle continu partiel du jeudi 2 décembre 2010

Exercice 1

Question 1. La restriction de f aux droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ est nulle, donc continue. La restriction de f à la droite d'équation $y = mx$, $m \neq 0$, est la fonction $(x,y) \to \dfrac{mx}{x^2 + m^2}$ (expression valable y compris pour $x = 0$), qui est continue comme composée des fonctions $(x,y) \to x$ et $x \to \dfrac{mx}{x^2 + m^2}$. La restriction de f a toute droite de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ passant par l'origine est donc continue. ■

Question 2. Si la fonction f était continue, on aurait $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \to f(0,0) = 0$ quand $n \to +\infty$, puisque $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \to (0,0)$. Or $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0, et donc f n'est pas continue. ■

Exercice 2

Question 1. Pour montrer que $\mathbb{Q}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ sont denses dans $\mathbb{R}^2$, il suffit de prouver que tout ouvert élémentaire de $\mathbb{R}^2$ de la forme $I \times J$, où I et J sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, contient un point de $\mathbb{Q}^2$ et un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. A cet effet, il suffit de prouver que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel. Mais ceci résulte immédiatement du fait que $\frac{1}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n} \to 0$, de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, et du fait qu'un multiple entier d'un rationnel (resp. d'un irrationnel) est rationnel (resp. irrationnel).

La fonction caractéristique $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}^2}$ de $\mathbb{Q}^2$ ne prend que les valeurs 0 ou 1. Si elle est continue au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un voisinage ouvert V de (x,y) sur lequel elle est constante. Mais tout voisinage ouvert V de (x,y) contient un point de $\mathbb{Q}^2$ et un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ (car ces deux sous-ensembles sont denses dans $\mathbb{R}^2$), de sorte que la restriction de f à V prend les valeurs 0 et 1, donc n'est pas constante. Il s'ensuit que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}^2$. ■

Question 2. Comme A est fermé, son complémentaire $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ est ouvert. Comme B est inclus dans A, la fonction f_A est nulle sur U. Pour tout point (x_o, y_o) de U et tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un voisinage ouvert de (x_o, y_o), à savoir U lui-même, tel que l'on ait :

$$(x,y) \in U \Rightarrow |f_A(x_o, y_o) - f_A(x,y)| = 0 \leq \varepsilon .$$

Tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est donc un point de continuité de f_A. ■

Question 3. Soit $z = (x,y) \in \partial A$. Toute boule ouverte $B(z, \frac{1}{n})$ contient au moins un point $z_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, car sinon il existerait une boule ouverte $B(z, \frac{1}{n})$ incluse dans A, et on aurait $z = (x,y) \in \overset{o}{A}$, ce qui est absurde puisque $z \in A \setminus \overset{o}{A}$. Comme $z_n \in B(z, \frac{1}{n})$, la suite des $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ converge vers (x,y). Mais $f_A(x_n, y_n) = 0$ et $f_A(x,y) = 1$, de sorte que l'on n'a pas $f_A(x,y) = \lim_{n \to +\infty} f_A(x_n, y_n)$, et par conséquent (x,y) est un point de discontinuité de f_A. Ainsi, tout point de ∂A est un point de discontinuité de f_A. ■

Question 4. Soit $z = (x,y) \in \overset{o}{A} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$. Comme $\overset{o}{A}$ est un ouvert contenant z, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(z,r)$ soit contenue dans $\overset{o}{A}$. Pour tout entier $n \geq 1$, la boule ouverte $B(z, \frac{r}{n})$ contient au moins un point $z_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{Q}^2$ (par densité de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$). Comme $z_n \in B(z, \frac{1}{n}) \subset B(z,r) \subset \overset{o}{A}$, on a $z_n = (x_n, y_n) \in \overset{o}{A} \cap \mathbb{Q}^2$ et la suite des (x_n, y_n) converge vers (x,y). Mais $f_A(x_n, y_n) = 0$ et $f_A(x,y) = 1$, de sorte que l'on ne peut avoir $f_A(x,y) = \lim_{n \to +\infty} f_A(x_n, y_n)$, et par conséquent (x,y) est un point de discontinuité de f_A. Ainsi, tout point de $\overset{o}{A} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$ est un point de discontinuité de f_A. ■

Question 5. Soit $z=(x,y)\in \overset{o}{A}\cap \mathbb{Q}^2$. Comme à la question précédente, il existe $r>0$ tel que la boule ouverte $B(z,r)$ soit contenue dans $\overset{o}{A}$. Pour tout entier $n\geq 1$, la boule ouverte $B(z,\frac{r}{n})$ contient au moins un point $z_n=(x_n,y_n)\in \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$ (par densité de $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$). Mais alors, $(x_n,y_n)\in \overset{o}{A}\cap(\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2)$ et $(x_n,y_n)\to(x,y)$. Comme $f_A(x_n,y_n)=1$ et $f_A(x,y)=0$, le point (x,y) est un point de discontinuité de f_A. Ainsi, tout point de $\overset{o}{A}\cap\mathbb{Q}^2$ est un point de discontinuité de f_A. Comme $A=[\overset{o}{A}\cap(\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2)]\cup(\overset{o}{A}\cap\mathbb{Q}^2)\cup\partial A$, ce qui précède montre que tout point de A est un point de discontinuité de f_A. Comme tout point de $\mathbb{R}^2\setminus A$ est un point de continuité de f_A en vertu de la question 2, l'ensemble des points de discontinuité de f_A est égal à A. ■

EXERCICE 3

Question 1. Si la forme linéaire $L:F\to\mathbb{R}$ de F définie par $L(f)=f'(\frac{1}{2})$ était continue pour la topologie de la norme $\|\,.\,\|_\infty$, il existerait une constante $C\geq 0$ telle que l'on ait, pour toute $f\in F$:

$$\left|f'(\tfrac{1}{2})\right|=|L(f)|\leq C\|f\|_\infty=C\underset{0\leq x\leq 1}{Sup}|f(x)|.$$

En particulier, on aurait pour la fonction $f_n:x\to sin(2\pi nx)$, qui appartient à F :

$$2\pi n=|2\pi n\cos(\pi n)|=\left|f_n'(\tfrac{1}{2})\right|\leq C\underset{0\leq x\leq 1}{Sup}|sin(2\pi nx)|\leq C,$$

ce qui est absurde pour n suffisamment grand. La forme linéaire $L:F\to\mathbb{R}$ n'est donc pas continue pour la topologie de la norme $\|\,.\,\|_\infty$ sur F. ■

Question 2. Considérons la fonction $f\in E$ définie par :

$$f(x)=\sqrt{(x-\tfrac{1}{2})^2}=\left|x-\tfrac{1}{2}\right|.$$

Pour tout $n\geq 1$ et tout $x\in[0,1]$, on a :

$$(f_n(x)-f(x))(f_n(x)+f(x))=(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{n^2}-(x-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{n^2},$$

d'où :

$$|f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{n^2\left(\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2}\,\right)} \leq \frac{1}{n^2\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n}.$$

Il s'ensuit que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, et la suite $(f_n)_n$ converge dans E vers la fonction f définie par $f(x)=|x-\frac{1}{2}|$. ■

Question 3. Les fonctions f_n de la question 2 sont de classe C^1 sur $[0,1]$ (noter que la fonction $f_n'(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{f_n(x)}$ est continue sur $[0,1]$), donc elles appartiennent à F. Elles convergent vers la fonction $f\in E$ qui n'appartient pas à F, puisque la fonction $x\to|x-\frac{1}{2}|$ n'est pas dérivable en $x=\frac{1}{2}$. Il s'ensuit que l'espace F n'est pas fermé dans E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Comme F n'est pas fermé dans E, il ne peut pas être complet pour la norme pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$. ■

Question 4. Tout d'abord, l'application $f\to\|f\|=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ est clairement une norme sur F. Montrons que F est complet pour cette norme. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans F. Comme on a :

$$\|f_n-f_p\|_\infty \leq \|f_n-f_p\| \text{ et } \|f_n'-f_p'\|_\infty \leq \|f_n-f_p\|,$$

les suites $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(f_n')_{n\geq 1}$ sont de Cauchy dans $E=C([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme. Comme E est complet pour cette norme, il existe deux fonctions continues $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ telles que $\|f_n-f\|_\infty\to 0$ et $\|f_n'-g\|_\infty\to 0$. Puisque chaque f_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, on a pour tout $x\in[0,1]$ en vertu du théorème fondamental du calcul infinitésimal :

$$f_n(x)=f_n(0)+\int_0^x f_n'(t)dt.$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient, compte tenu de la continuité de la fonction $h\to\int_0^x h(t)dt$ pour la norme de la convergence uniforme :

$$f(x)=f(0)+\int_0^x g(t)dt.$$

Mais g est continue, de sorte que cette dernière formule implique que f est dérivable, de dérivée $f'(x) = g(x)$. Il s'ensuit que $f \in F$, et la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans F puisque l'on a :

$$\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - g\|_\infty \to 0 .$$

Ceci prouve que F est complet pour la norme $\| \,.\, \|$. ■

Question 5. Pour toute $f \in F$, on a :

$$\|i(f)\|_\infty = \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|,$$

ce qui montre que l'application linéaire $i : (F, \| \,.\, \|) \to (F, \| \,.\, \|_\infty)$ est continue et que sa norme vérifie $\|i\| \leq 1$. Comme la fonction $f(x) = 1$ appartient à F et vérifie $\|i(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1 = \|f\|$, on a :

$$\|i\| = \underset{f\in F, \|f\|\leq 1}{Sup} \|i(f)\|_\infty \geq 1 ,$$

et donc $\|i\| = 1$.

L'inverse de $i : (F, \| \,.\, \|) \to (F, \| \,.\, \|_\infty)$ est l'application identique de F. Elle n'est pas continue, car sinon la forme linéaire $L(f) = f'(\frac{1}{2})$, qui est continue sur F pour la norme $\| \,.\, \|$ puisque $|f'(\frac{1}{2})| \leq \|f'\|_\infty \leq \|f\|$, serait continue pour la norme $\| \,.\, \|_\infty$, ce qui serait en contradiction avec la question 1. ■
