Université Claude Bernard Lyon I. Année universitaire 2010-2011
Licence STS, UE MAT 3001L (Topologie Générale)

CONTRÔLE CONTINU PARTIEL DU JEUDI 2 DÉCEMBRE 2010

La durée de l'épreuve est de 2h30. Un barème (sur 22 points) figure à titre indicatif. On attachera du prix à la rédaction des solutions.

EXERCICE 1 (sur 3 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

Question 1 (1 point). Montrer que la restriction de f à toute droite de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ passant par l'origine est continue.

Question 2 (2 points). La fonction f est-elle continue ? (*Indication* : on pourra calculer $f(x,x^2)$).

EXERCICE 2 (sur 8 points)

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa topologie canonique. Pour toute partie A de $\mathbb{R}^2$, on note $\overset{o}{A}$ son intérieur, $\overline{A}$ son adhérence, et $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{o}{A}$ sa frontière.

Question 1 (2 points). Montrer que $\mathbb{Q}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ sont denses dans $\mathbb{R}^2$. En déduire que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = 1 \text{ si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \text{ et } f(x,y) = 0 \text{ si } (x,y) \notin \mathbb{Q}^2,$$

n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}^2$.

Dans ce qui suit, on considère une partie fermée A de $\mathbb{R}^2$, et on pose : $B = [\overset{o}{A} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)] \cup \partial A$. On veut montrer que l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f_A définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_A(x,y) = 1 \text{ si } (x,y) \in B \text{ et } f_A(x,y) = 0 \text{ si } (x,y) \notin B,$$

est égal à A.

Question 2 (1 point). Montrer que f_A est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Question 3 (1 point). Soit $(x,y) \in \partial A$. Montrer l'existence d'une suite (x_n, y_n) de points de $\mathbb{R}^2 \setminus A$ telle que $(x,y) = \lim_{n \to +\infty} (x_n, y_n)$. En déduire que tout point de ∂A est un point de discontinuité de f_A.

Question 4 (2 points). Soit $(x,y) \in \overset{o}{A} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$. Montrer qu'il existe une suite (x_n, y_n) de points de $\overset{o}{A} \cap \mathbb{Q}^2$ qui converge vers (x,y). En déduire que tout point de $\overset{o}{A} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$ est un point de discontinuité de f_A.

Question 5 (2 points). Montrer que tout point de $\overset{o}{A} \cap \mathbb{Q}^2$ est un point de discontinuité de f_A. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f_A est égal à A.

EXERCICE 3 (sur 11 points)

On munit l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = Sup_{0 \le x \le 1} |f(x)|$. On note F le sous–espace vectoriel de E des fonctions $f \in E$ qui sont dérivables et à dérivée continue sur $[0,1]$.

Question 1 (2 points). Montrer que la forme linéaire $L : F \to \mathbb{R}$ de F définie par $L(f) = f'(\frac{1}{2})$ n'est pas continue pour la topologie de la norme $\| . \|_\infty$.

Question 2 (1 point). On considère la suite $(f_1, f_2, \ldots)$ de fonctions de E définie par $f_n(x) = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{n^2}}$. Montrer que cette suite converge dans E vers une fonction que l'on déterminera.

Question 3 (2 points). Montrer que F n'est pas complet pour la norme $\| . \|_\infty$.

Question 4 (3 points). On munit F de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que F est un espace de Banach pour cette norme.

Question 5 (3 points). Soit $i : (F, \| . \|) \to (F, \| . \|_\infty)$ l'application identique définie par $i(f) = f$. Montrer que i est continue et calculer sa norme. Montrer que l'inverse de $i : (F, \| . \|) \to (F, \| . \|_\infty)$ n'est pas continue.