Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2011

Math II - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 3

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

---

Les trois exercices ont pour objet de déterminer des développements asymptotiques ou équivalents de trois suites particulières. Ils sont strictement indépendants, bien que les méthodes des exercices 2 et 3 soient à certains égards apparentées. Les notations sont locales à l'intérieur de chaque exercice.

Exercice 1

1) Pour a et b réels et $n \geq 1$ entier, on note :

$$y_n = 1 + \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n^4}$$

a) Montrer que quand n tend vers $+\infty$:

$$y_n - \cos\left(\frac{y_n}{n}\right) = \left(\frac{2a+1}{2}\right)\frac{1}{n^2} + \left(\frac{24a+24b-1}{24}\right)\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

b) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles :

$$y_n - \cos\left(\frac{y_n}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

2) Pour $n \geq 1$, on note φ_n l'application de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$\varphi_n(t) = t - \cos\left(\frac{t}{n}\right).$$

a) Montrer que φ_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) Montrer qu'il existe un et un seul x_n dans $[0,1]$ solution de l'équation :

$$x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right).$$

c) Montrer que x_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

d) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$ et tous s et t dans $[0,1]$:

$$|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| \geq |s-t|.$$

3) La notation x_n étant celle de la question précédente et la notation y_n celle de la question 1, montrer que pour tout $n \geq 1$ tel que $y_n \in [0,1]$:

$$|y_n - \cos\left(\frac{y_n}{n}\right)| \geq |y_n - x_n|.$$

En déduire un développement limité de x_n en $1/n$ à l'ordre 4 (où n tend vers l'infini).

Exercice 2

On considère la suite récurrente (u_n) définie par l'initialisation $u_0 = 1$ puis la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(u_n).$$

Dans la suite de l'exercice, on notera pour tout $n \geq 0$:

$$v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) + \ln 2.$$

1) a) Montrer que pour tout x dans $]0, 1]$:

$$0 < \sin x \leq x.$$

b) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$:

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2} \leq 1.$$

c) Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$0 < u_n \leq \frac{1}{2^n} \text{ et } v_n \leq 0.$$

2) a) En écrivant :

$$v_n = \ln\left(\frac{1}{2}\sin(u_n)\right) - \ln u_n + \ln 2$$

et en utilisant un développement limité de la fonction sinus, montrer que, quand n tend vers $+\infty$:

$$v_n = -\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2).$$

b) Montrer qu'il existe un $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|v_n| \leq u_n^2 \leq \frac{1}{4^n}.$$

c) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que pour tout $n \geq 0$,

$$|v_n| \leq \frac{A}{4^n} \qquad \text{et donc} \qquad -\frac{A}{4^n} \leq v_n \leq 0.$$

3) Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$s_n = \ln(u_n) + n \ln 2$$

a) Montrer que (s_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k.$$

c) Montrer que (s_n) est une suite minorée.

d) En déduire que la suite (s_n) admet une limite réelle.

4) On note l la limite de la suite (s_n) de la question précédente. Montrer que, quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n \sim \frac{e^l}{2^n}.$$

Exercice 3
Dans cet exercice on note, pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et :

$$a_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

2) Montrer que quand n tend vers l'infini :

$$a_n \sim -\frac{1}{12n^2}.$$

3) Montrer qu'il existe un $N \geq 2$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$-\frac{1}{6n^2} \leq a_n \leq 0.$$

4) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}.$$

5) En écrivant (en le justifiant !) :

$$\ln(u_n) - \ln(u_N) = \sum_{k=N}^{n-1} a_k,$$

montrer que la suite $(\ln(u_n))_{n \geq N}$ est décroissante et minorée, et en déduire qu'elle possède une limite quand n tend vers $+\infty$.
6) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ (qu'on ne cherchera pas à calculer) telle que, quand $n \to +\infty$:

$$n! \sim C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$