
Feuille d'exercices n° 3

Ensembles et applications

Ensembles

Exercice 1.

1. On note $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.
2. On note $A = [1, 3]$ et $B =]2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $[3, 8[\cap \mathbf{Z}$, $[-3, 2[\cap \mathbf{N}$ et $]0, 1[\cap \mathbf{Z}$.
4. Déterminer le complémentaire dans $\mathbf{R}$ des parties $]-\infty, 0]$ et $[1, 2[$.
5. Déterminer $]-2, 3] \setminus \mathbf{Z}$, $]-2, 3] \setminus [0, 4]$ et $]-2, 3] \setminus [-4, 4]$.

Exercice 2. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \subset B$;
   (b) $A \cap B = A$;
   (c) $A \cup B = B$;
   (d) $A \setminus B = \emptyset$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \cup B = A \cap C$;
   (b) $B \subset A \subset C$.
3. Montrer l'implication

$$(A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C) \;\Rightarrow\; B \subset C\ .$$

Exercice 3. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}_\star = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Déterminer

$$\bigcup_{x \in E} \{x\}, \quad \bigcap_{x \in E} \{x\}, \quad \bigcup_{A \in \mathcal{P}_\star} A \quad \text{et} \quad \bigcap_{A \in \mathcal{P}_\star} A\ .$$

Exercice 4. On note, pour tout $(i, j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, $A_{i,j} = [i - j, i + j]$. Déterminer

$$X = \bigcap_{i \in \mathbf{Z}} \bigcup_{j \in \mathbf{N}} A_{i,j} \qquad \text{et} \qquad Y = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} \bigcap_{i \in \mathbf{Z}} A_{i,j}\ .$$

Exercice 5. Soit E un ensemble et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

1. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \subset B$;
   (b) $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
3. Montrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6. Soit E un ensemble et $(A, B, X) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. On suppose $B \subset A$. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \cap X = B$;
   (b) il existe $Y \subset E \setminus A$ tel que $X = B \cup Y$.
2. On suppose $A \subset B$. Comme précédemment, résoudre en X l'équation $A \cup X = B$.

Applications

Exercice 7. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

1. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \cos(x)$;
2. $[\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$;
3. $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;
4. $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x$;
5. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
6. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
7. $\{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 7, 9, 11\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;
8. $\{0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 1\}$, $x \mapsto -(x - 1)$;
9. $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $f \mapsto f(0)$.

Exercice 8.

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \{0\}$. Montrer que f est surjective mais pas injective.
2. Soit E un ensemble, $n \in \mathbf{N}^\star$, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et $f : \{x_i \,|\, i \in [\![1, n]\!]\} \to \mathbf{R}$. Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice 9.

1. On note $\mathcal{F}_{\mathrm{p}}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathcal{F}_{\mathrm{i}}$ celui des fonctions impaires, puis l'on définit
$$F : \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathcal{F}_{\mathrm{p}} \times \mathcal{F}_{\mathrm{i}}, f \mapsto (f_p, f_i)$$
où $f_p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Montrer que F est bijective et donner son inverse.
2. Pour les notations de la question précédente, donner des bijections de $\mathcal{F}_{\mathrm{p}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et de $\mathcal{F}_{\mathrm{i}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}_+^\star, \mathbf{R})$.

Exercice 10. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Soit $(g, h) \in \mathcal{F}(G, E)^2$. Montrer que si f est injective et $f \circ g = f \circ h$, alors $g = h$.
2. Soit $(g, h) \in \mathcal{F}(F, G)^2$. Montrer que si f est surjective et $g \circ f = h \circ f$, alors $g = h$.
3. On suppose que, pour tout couple de fonctions $(g, h) \in \mathcal{F}(G, E)^2$, $f \circ g = f \circ h$ implique $g = h$. Montrer que f est injective.
4. On suppose que G a au moins deux éléments et que, pour tout couple de fonctions $(g, h) \in \mathcal{F}(F, G)^2$, $g \circ f = h \circ f$ implique $g = h$. Montrer que f est surjective.

Exercice 11. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Exercice 12. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
3. On considère maintenant $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, $x \mapsto (\max(x, 0), \max(-x, 0))$.
   (a) Montrer que f est injective et donner $g : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$.
   (b) Quelle est l'image de f ?

Exercice 13. Soit E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$. Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$.

Exercice 14. Décrire les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\cos^{-1}([0, 1])$;
4. $\left(\cos_{\,|\,[3,7]}\right)^{-1}([0, 1])$;
5. $\left(\cos_{\,|\,[0,\pi]}\right)^{-1}([0, 1])$;

6. $f^{-1}([0,1])$ pour $f ; \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$;
7. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$;
9. $\sqrt{\cdot}\,([0,1])$;
10. $f^{-1}([-1,1[\cup\{2\})$ et $f([0,1]^3)$ pour $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x,y,z) \mapsto y$;
11. $|\cdot|([-2,-1] \cup [2,4[)$;
12. $\left(|\cdot|_{|[-8,7]}\right)^{-1}([2,3])$;
13. $|\cdot|^{-1}(\{1\})$.

Exercice 15. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit $B \subset F$.
   (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
   (b) À quelle condition a-t-on $f(f^{-1}(B)) = B$?
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Soit $A \subset E$.
   (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Que peut-on dire si $f_{|f^{-1}(f(A))}$ est injective ?
4. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 16. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) .$$
2. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout ensemble I et toute famille $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$, on a
$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i) .$$
3. Soit I un ensemble et $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) .$$

Exercice 17. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$. On définit
$$S = \left\{ A \in \mathcal{P}(E) \mid f^{-1}(f(A)) = A \right\} .$$

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $f^{-1}(f(A)) \in S$.
2. Montrer que S est stable par réunion et intersection quelconques.
3. Montrer que, pour tous $A \in S$, $B \in \mathcal{P}(E)$ disjoints, A et $f^{-1}(f(B))$ sont disjoints.
4. En déduire que S est stable par différence.