Feuille d'exercices n° 2

Sommes et produits

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$. Montrer que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i = 0$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \leq \frac{x}{n}$.

Exercice 2.

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N}$. Calculer $(x - y) \times \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i y^{n-1-i}$. En déduire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{i \in [\![1, 2n]\!] \\ i \text{ impair}}} i$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$
5. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer
$$\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \min(\{i, j\}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \max(\{i, j\}) .$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^\star)^n$. Montrer que
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2 .$$
Indication : étudier le cas $n = 2$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbf{N}$, $(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $(y_0, \cdots, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2}$. Montrer que
$$\sum_{i=0}^{n} x_i \; (y_{i+1} - y_i) = - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \; y_i + (x_n \, y_{n+1} - x_0 \, y_0) .$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$.

1. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, \frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{2} \ \geq \ 0 \ .$$
Indication : écrire l'expression comme une somme de carrés.
2. À quelle condition la somme précédente est-elle nulle ?

Exercice 6. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$. Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \ \geq \ 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in [1, \infty[^n$. Montrer que si $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i = 1$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}^-$, $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\prod_{i=1}^{n} x_i = x$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \leq 0$.
3. Soit $x \in \mathbf{R}^+$, $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\prod_{i=1}^{n} x_i = x$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \leq x^{\frac{1}{n}}$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ Montrer que
$$\left| \prod_{i=1}^{n} x_i \right| \ \geq \ \left(\min_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| \right)^n \ .$$
En déduire que, si $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0$.

Exercice 8. On rappelle la définition : pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$\mathrm{C}_n^k \ = \ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \ = \ \frac{n!}{k!(n-k)!} \ = \ \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{(\prod_{i=1}^{k} i)(\prod_{i=1}^{n-k} i)} \ .$$

1. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et tout $n \in \mathbf{N}$,
$$(a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, a^k \, b^{n-k} \ .$$
Indication : on pourra démontrer l'identité dite du triangle de Pascal.
2. Donner une interprétation combinatoire de l'égalité précédente.