Feuille d'exercices n^o 12

GROUPES

Exercice 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on note $x \star y = x^2 + y^2$.

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative mais pas associative.
2. La loi $\star$ admet-elle un élément neutre ?

Exercice 2. On définit sur $\mathbf{R}$ la loi $\star$ par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x \star y = x + y - xy$.

1. Montrer que $(\mathbf{R} \setminus \{1\}, \star)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que $f : (\mathbf{R} \setminus \{1\}, \star) \to (\mathbf{R}^\star, \times)$, $x \mapsto 1 - x$ est un isomorphisme de groupes.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $x^{\star n} := \underbrace{x \star x \star \cdots \star x}_{n \text{ fois}} = 1 - (1 - x)^n$.

Exercice 3.

1. Montrer que $(\mathbf{Z}, +)$ est un groupe.
2. $(\{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}, +)$ et $(\{2k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}, +)$ sont-ils des sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$?

Exercice 4. *Cours.* Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

On note $E = [\![1, n]\!]$ et S_n, ou σ_n, l'ensemble des bijections de E dans lui-même.

1. Montrer que $(S_n, \circ)$ est un groupe.
2. Rappeler quel est le cardinal de S_n.
3. Les éléments de S_n sont appelés permutations. Une permutation $\sigma \in S_n$ est notée
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} .$$
Ainsi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ désigne la permutation de S_3 qui envoie 1 sur 2, 2 sur 1, 3 sur 3. On considère p_1 et p_2 les deux permutations de S_5 définies par :
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$
Calculer $p_1 \circ p_2$, $p_2 \circ p_1$ et l'inverse de p_1.
4. (a) Dresser la liste des éléments de S_3.

   (b) Montrer que S_3 n'est pas abélien.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, S_n n'est pas abélien.

Exercice 5. Soit G un groupe.

1. Soit I un ensemble et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G.
   Montrer que $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.
2. Soit $S \subset G$. Montrer qu'il existe un plus petit sous-groupe de G contenant S.
   On l'appelle *sous-groupe engendré par* S et le note $< S >$.

Exercice 6. Soit G un groupe. On appelle *centre de* G, noté $Z(G)$, le sous-ensemble de G défini par :

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G,\ gh = hg\}.$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 7. Soit G un groupe, d'élément neutre e, tel que, pour tout $g \in G$, $g^2 = e$.
Montrer que G est abélien.

Exercice 8. *Cours.* Soit $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes.

1. On note e_1 l'élément neutre de G_1 et e_2 l'élément neutre de G_2. Montrer que $f(e_1) = e_2$.
2. Montrer que, pour tout $x \in G_1$, $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.
3. Montrer que, pour tout sous-groupe H de G_1, $f(H)$ est un sous-groupe de G_2.
4. Montrer que, pour tout sous-groupe K de G_2, $f^{-1}(K)$ est un sous-groupe de G_1.
5. Montrer que le noyau de f, $\ker f := f^{-1}(\{e_2\})$, est un sous-groupe de G_1.
6. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker f = \{e_1\}$.
7. Exemple : on considère $\varphi : (\mathbf{Z}, +) \to (\mathbf{Z}, +)$, $x \mapsto 3x$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de groupes.
   (b) Montrer que φ est injective.
   (c) Montrer que $\{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$.
   (d) Montrer que φ n'est pas un isomorphisme.

Exercice 9.
Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on note U_n le sous-ensemble de $\mathbf{C}^\star$ dont les éléments sont les racines n-ièmes de l'unité :

$$U_n \ = \ \{\ z \in \mathbf{C}^\star \mid z^n = 1\ \}\ .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, U_n est un sous-groupe de $(\mathbf{C}^\star, \times)$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $(\mathbf{C}^\star, \times)$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $G = U_n$.
3. Montrer que, pour tout $(n, d) \in (\mathbf{N}^\star)^2$, $U_d \subset U_n$ si et seulement si d divise n.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, il existe $a_n \in U_n$ tel que $U_n =< \{a_n\} >$.

Exercice 10.
Montrer que tout groupe fini $(G, *)$ dont l'ordre est un nombre premier est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe $x \in G$ engendrant G, explicitement tel que $G =< \{x\} >= \{\ x^{*n} \mid n \in \mathbf{Z}\ \}$.
Indication : justifier que G contient un élément x différent de l'élément neutre et considérer le sous-groupe de G engendré par x.

Exercice 11. Écrire la table de tous les groupes d'ordre 2, 3 et 4.