Feuille d'exercices n^o 11

DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Montrer que les expressions suivantes définissent des fonctions dérivables sur des ensembles à déterminer, et donner leur dérivée.

1. $f(x) = |x|$;
2. $g(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$;
3. $h(x) = \ln(\ln x)$;
4. $j(x) = e^{\frac{1}{x}} (\cos(x))^5$;
5. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 2}{\sqrt{x^2+1} + 2}$.

Exercice 2. Tracer avec précision les graphes de $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x+1}$ et tan.
Indication : on veillera à indiquer les éventuelles asymptotes, les positions par rapport aux asymptotes, les points d'inflexion...

Exercice 3. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a, f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 4. Montrer qu'existent et déterminer les limites suivantes,

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{e^{x\cos(x)} - 1}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\cos(1+x) - \cos(1-x)}{x} \quad .$$

Exercice 5.

1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{x^7 + x^5 + 1}$ est injective.
2. Déterminer $E \subset \mathbf{R}$ tel que $\tilde{f} : \mathbf{R} \to E$, $x \mapsto f(x)$ soit une bijection.

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^\star} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array} .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

Exercice 7. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivables et $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tels que $a < b < c < d$.
On suppose que $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f(c) > 0$ et $f(d) < 0$.
Montrer qu'il existe $e \in]a, d[$ tel que $f''(e) = 0$.

Exercice 8. Déterminer si elles existent les valeurs des bornes inférieures et supérieures des ensembles qui suivent, et le cas échéant si ce sont des minima ou des maxima.

a. $\left\{ e^{-x^2} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$;

b. $\left\{ \dfrac{1+x}{1+x^2} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$;

c. $\left\{ x^4 - 6x^2 \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$;

d. $\left\{ x^2 + y^2 \;\middle|\; (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ xy = 1 \right\}$.

Exercice 9. Soit $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivables.
On suppose $\lambda(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ et que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(\lambda(x)) = g(x)$.
Calculer $\lambda'(0)$ et $\lambda''(0)$.

Exercice 10.

1. Soit $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable.
   À quelle condition sur ϕ a-t-on, pour tout $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable,
   $$\phi\ \big(f' + af\big) \;=\; (\phi\ f)' \quad ?$$
2. Soit $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable ne s'annulant pas et tel que $\psi' + a\psi = 0$.
   Vérifier que $1/\psi$ satisfait à la condition précédente.
3. Résoudre les équations qui suivent,
   (a) $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + 3f(t) = \cos(t) + te^t + e^{-3t}$;
   (b) $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + \dfrac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\, f(t) = 0$;
   (c) pour $\alpha \in \mathbf{R}$: $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + t f(t) = t\, e^{\alpha t^2}$;
   (d) pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$: $\forall t \in \mathbf{R}_+^\star,\ t\, f'(t) + \alpha\, f(t) = t^\beta$.
4. Pour la première équation, donner la solution vérifiant $f(0) = 1$.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable. On suppose que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f'(t) \leq a\, f(t)$.
Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f(t) \leq f(0)\, e^{at}$.
Indication : montrer qu'une certaine fonction est décroissante.

Exercice 12. Résoudre : $\forall t \in \mathbf{R},\ y'(t) = e^{t+y(t)}$.

Exercice 13.

1. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Vérifier que, pour tout $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivables, en posant $g = f' - af$, on définit une fonction dérivable telle que :

$$g' - b\,g \;=\; f'' - (a+b)f' + abf\ .$$

2. Résoudre les équations suivantes,
   (a) $f'' - 4f' + 3f = 0\,;$
   (b) pour $c \in \mathbf{R}$: $\forall t \in \mathbf{R},\ f''(t) + 4f(t) = e^{c\,t}\,;$
   (c) pour $c \in \mathbf{R}$: $\forall t \in \mathbf{R},\ f''(t) - 4f'(t) + 4f(t) = \sin(c\,t).$
3. Pour la première équation, déterminer la solution vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.