Feuille d'exercices n° 10
LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$.
En quels points $a \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la fonction f peut-elle admettre une limite ?

Exercice 2. Étudier l'existence d'une limite de f au point a pour les données suivantes :

1. $a = 1$ et $f : \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$;
2. $a = 0$ et $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;
3. $a = +\infty$ et $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$;
4. $a = -\infty$ et $f :]-\infty, -5] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3 + \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$;
5. $a = 0$ et $f :]0, \frac{\pi}{3}[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sin(3x)}$;
6. $a = 0$ et $f :]0, \pi[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$;
7. $a = +\infty$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sin(x)$.

Indication : on rappelle que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 3. Soit $T > 0$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application T-périodique.
Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice 4. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On suppose

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \exists x_n \in \mathbf{R},\ |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 .$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 5. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ et $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset]a, b[$ contenant x_0 tel que $\forall x \in I,\ f(x) > 0$.

Exercice 6. Étudier la continuité des fonctions suivantes en tout point de leur domaine :

1. $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$;
2. $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto E(x) + E(2 - x)$;
3. $h : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} x\, E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$;
4. $j : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbf{Q}^\star \\ x & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ une application continue.
Montrer que f est constante.

Exercice 8. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue, possédant des limites en $+\infty$ et en $-\infty$, notées respectivement $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$ et $\ell' = \lim\limits_{-\infty} f$.

1. Montrer que f est bornée.
2. On suppose qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) > \max(\{\ell, \ell'\})$.
   (a) Montrer qu'il existe $R \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que
   $$\sup_{\mathbf{R}} f \;=\; \sup_{[x_0-R,\, x_0+R]} f \;.$$
   (b) En déduire que f atteint sa borne supérieure.

Exercice 9. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application continue.

1. Montrer que, si $f([0,1]) \subset [0,1]$, alors f possède un point fixe.
2. Faire de même en supposant cette fois que $[0,1] \subset f([0,1])$.

Exercice 10. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues qui vérifient la condition

$$(*) \;:\qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\; f(x+y) = f(x)\, f(y)\,.$$

Soit f vérifiant $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?
   On suppose désormais que f ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha^n$.
5. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $f(k) = \alpha^k$.
6. Montrer que : $\forall r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha^r$.
7. Conclure.