Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2011

Math II - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 6

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

---

Exercice 1

Dans cet exercice on note pour tout k entier :

$$x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

et pour toute fonction f continue de $[-1,1]$ vers $\mathbf{R}$ et tout $n \geq 1$:

$$I(f) = \int_0^\pi f(\cos(x))\, dx \qquad \text{et} \qquad S_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\cos(x_k)).$$

1) Montrer que pour toute f continue de $[-1,1]$ vers $\mathbf{R}$, $S_n(f)$ tend vers $I(f)$ quand n tend vers $+\infty$.

Dans toute la suite de l'exercice, a est un réel strictement positif fixé, avec $a \neq 1$, et on note :

$$f(t) = \ln(a^2 - 2at + 1).$$

2) Montrer que f est continue sur $[-1,1]$ et en déduire que $S_n(f)$ tend vers $I(f)$ quand n tend vers $+\infty$.

3) a) Soit $n \geq 1$ un entier. Exprimer les racines $2n$-èmes de -1 dans $\mathbf{C}$ à l'aide de $x_1, \ldots, x_n$ (on pourra les regrouper deux par deux, rapprochant entre elles les racines conjuguées).

b) Factoriser $X^{2n}+1$ en irréductibles sur $\mathbf{C}$.

c) Déduire du b) que la factorisation en irréductibles sur $\mathbf{R}$ de $X^{2n}+1$ est :

$$\prod_{k=1}^{n}(X^2 - 2\cos(x_k)X + 1).$$

d) Montrer que :

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1).$$

4) En distinguant les cas où $a \in]0,1[$ et où $a \in]1,+\infty[$, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)$.

5) Déterminer un équivalent simple de $S_n(f) - I(f)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,dt \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,dt.$$

1) a) Justifier l'existence (dans $\mathbf{R}$) de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

b) En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que u_n est indépendant de $n \geq 1$ et préciser sa valeur.

2) Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour tout $m \geq 0$, on pose :

$$H_m = \int_\alpha^\beta h(t)\sin(mt)\,dt.$$

En utilisant une intégration par parties, montrer que H_m tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.

3) Dans cette question on pose, pour certains t réels :

$$h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Montrer que h est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4) a) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $v_n - u_n$.

b) En déduire l'existence et la valeur comme intégrale impropre de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Exercice 3

Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1) Pour toute matrice réelle A carrée $(3,3)$, $\det({}^tAA) \geq 0$. (La notation ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A).

2) Pour toute matrice réelle A carrée $(3,3)$ inversible, $\det(2A) \neq 2\det A$.

3) Deux matrices réelles carrées $(3,3)$ sont semblables si et seulement si elles ont le même déterminant.