Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2011

Math II - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 4

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

---

Un exercice d'algèbre

On fixe un entier $n \geq 2$. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des matrices (n, n) à coefficients réels A vérifiant la propriété suivante :

$$(*) \qquad \text{pour toute matrice } (n,n)\, B \text{ à coefficients réels, } AB = BA.$$

Pour i et j entiers compris entre 1 et n, on notera E_{ij} la matrice (n, n) dont les coefficients sont nuls, sauf celui situé en i-ème ligne et j-ème colonne, qui vaut 1.

1) Dans cette question, et dans cette question seulement, $n = 2$. On considère une matrice A vérifiant $(*)$ et on note ses coefficients en posant : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En faisant intervenir la matrice $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $b = c = 0$, puis en faisant intervenir la matrice $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $a = d$.

2) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice vérifiant $(*)$. On note i un entier compris entre 1 et n. En utilisant la matrice E_{ii}, montrer que pour tout $k \neq i$, $a_{ik} = 0$.

3) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice vérifiant $(*)$. On note i et j deux entiers distincts tous deux compris entre 1 et n. En utilisant la matrice E_{ij}, montrer que $a_{ii} = a_{jj}$.

4) Montrer que l'ensemble des matrices A vérifiant $(*)$ est le sous-espace vectoriel de l'espace des matrices carrées (n, n) engendré par I_n.

Un problème d'analyse

1) Soit g une fonction à valeurs réelles continue sur $[0, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$. On suppose que $g'(x)$ admet une limite réelle l quand x tend vers 0^+ $(x \neq 0)$. Montrer que g est dérivable en 0 avec $g'(0) = l$ et que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

2) Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. On définit une fonction g en posant :

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} \text{ si } 0 < x \leq 1 \text{ et } g(0) = f'(0).$$

a) Montrer que g est une fonction continue sur $[0,1]$.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.

c) En appliquant le théorème de Taylor-Young à f et à f', écrire des développements limités de ces deux fonctions respectivement à l'ordre 2 et à l'ordre 1, puis utiliser ces développements limités pour montrer que $g'(x)$ admet une limite réelle l quand x tend vers 0^+ $(x \neq 0)$.

d) En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

3) Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \sin(nx)h(x)\,dx \to 0 \qquad \text{quand} \qquad n \to +\infty.$$

4) Dans la suite du problème, on note φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x > 0 \text{ et } \varphi(0) = 1.$$

a) Montrer que φ est continue sur $\mathbf{R}^+$.

b) Pour chaque $n \geq 1$, on pose :

$$v_n = \int_0^n \varphi(t)\,dt.$$

Soit p et q deux entiers tels que $0 < p \leq q$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\left| \int_p^q \varphi(t)\,dt \right| \leq \frac{2}{p}.$$

En déduire que la suite (v_n) est convergente. Dans la question suivante, on notera v sa limite.

5) Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, on note :

$$u_n(f) = \int_0^1 \sin(nx)\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

a) Justifier qu'on peut définir $u_n(f)$ et qu'on a l'identité :

$$u_n(f) = \int_0^1 \sin(nx)\frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx + \int_0^1 \sin(nx)\frac{f(0)}{x}\,dx.$$

b) À l'aide des questions 2 et 3, montrer que la première intégrale qui apparaît dans l'identité précédente tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $u_n(f) \to vf(0)$ quand n tend vers $+\infty$.

6) Dans cette question, qui étend le résultat de la question 3, on suppose seulement la fonction h continue sur $[0, 1]$.

a) Pour $n \geq 4$, on note :

$$I_n = \int_0^{\pi/n} \sin(nx)h(x)\,dx$$

$$J_n = \int_{1-\pi/n}^1 \sin(nx)h(x)\,dx$$

$$K_n = \int_{\pi/n}^1 \sin(nx)\left[h(x) - h(x - \frac{\pi}{n})\right]\,dx.$$

Montrer que :

$$\int_0^1 \sin(nx)h(x)\,dx = \frac{1}{2}(I_n + J_n + K_n).$$

b) Montrer que quand n tend vers $+\infty$, I_n et J_n tendent vers 0.

c) En utilisant le théorème de Heine, montrer que K_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, et conclure que $\int_0^1 \sin(nx)h(x)\,dx$ tend vers 0.