Matrices : exercices stupidement calculatoires

Exercice 137
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB lequels ont un sens ? Calculez les.

Exercice 138
Soit A la matrice carrée (réelle) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 139
A tout nombre réel t on associe la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

1) Soit t_1 et t_2 deux réels. Calculer le produit matriciel $M(t_1)M(t_2)$.

2) Soit t un réel. Montrer que $M(t)$ est inversible et fournir une expression très simple de $[M(t)]^{-1}$.

Exercice 140
Montrer que la matrice carrée A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible en calculant explicitement son inverse.

Exercice 141
Soit A la matrice carrée (réelle) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $B = A - I$.

1) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 0$.

2) En déduire A^n pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 142
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbf{R}$, soit (e_1, e_2, e_3) une base de E et soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\begin{array}{rcc} f(e_1) & = & -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2 & = & 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) & = & 6e_1 + 6e_2 - e_3 \end{array}.$$

1) Décrire l'application linéaire $f \circ f$.

2) Montrer que f est bijective et décrire l'application linéaire f^{-1}.

Exercice 143

1) En fournissant une matrice équivalente échelonnée, déterminer le rang de chacune des matrices réelles suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

2) Quel est la dimension du sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $(-1,7,0)$, $(4,2,1)$ et $(3,9,1)$?

3) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbf{R}^3$ défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -x & +7y & & = & 0 \\ 4x & +2y & +z & = & 0 \\ 3x & +9y & +z & = & 0 \end{cases} \qquad ?$$

4) Et quelle est celle du sous-espace défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -x & +4y & +3z & = & 0 \\ 7x & +2y & +9z & = & 0 \\ & y & +z & = & 0 \end{cases} \qquad ?$$

Espace vectoriel des matrices, manipulations abstraites

Exercice 144

Soit $n \geq 1$ un entier et $\mathbf{K}$ un corps commutatif ; on suppose en outre que dans $\mathbf{K}$, $1 + 1 \neq 0$. On considère les sous-espaces S_n et A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ composés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques.

1) Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et déterminer leurs dimensions respectives.

2) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est somme directe de S_n et A_n.

3) Que se passe-t-il si on essaie de faire le même exercice avec $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $n = 2$?

Exercice 145

Soit A une matrice (m, n). On suppose qu'il existe une matrice (n, m) B telle que $AB = I_m$ et $BA = I_n$. Montrer que $m = n$.

Exercice 146

Soit $n \geq 1$ et soit A et B deux matrices carrées (n, n). On suppose que la somme de chaque ligne de A et la somme de chaque ligne de B vaut 1. Montrer qu'il en est de même pour le produit AB.

Exercice 147

On notera E l'ensemble des matrices réelles $(3, 3)$ M qui ont la propriété suivante : les trois sommes de ses trois lignes de M, les trois sommes des trois colonnes de M et les deux sommes des deux diagonales de M sont toutes les huit égales.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

2) Constater que si $M \in E$, ${}^tM \in E$.

3) Déterminer les matrices symétriques qui sont aussi dans E.

4) Déterminer les matrices antisymétriques qui sont aussi dans E.

5) En utlisant les questions précédentes et la formule $M = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) + \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$, déterminer la dimension de E.

Exercice 148
On dit qu'une matrice carrée M est nilpotente lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ et qu'elle est racine de l'unité lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = I$.
Soit $n \geq 1$ un entier et A et B deux matrices carrées (n, n).

1) Montrer que si AB est nilpotente, BA l'est aussi.

2) Montrer que si AB est racine de l'unité, BA l'est aussi.

Identités matricielles et calculs de puissances ou d'inverses

Exercice 149
Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible en calculant son inverse A^{-1}.

2) En déduire la valeur de A^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 150
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis A^3, puis A^n pour tout entier $n \geq 1$. Calculer l'inverse B de A, puis toutes les puissances B^n pour $n \geq 1$.
On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice A dans la base canonique. Soit $u = (x, y)$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$ et $n \geq 1$; expliciter $\varphi^n(u)$ (où l'exposant signifie la composée de φ n fois).

Exercice 151
Soit A une matrice carrée. On suppose que A vérifie l'identité : $A^3 - 2A - I = 0$.
Montrer que A est inversible et donner une formule simple pour A^{-1}.

Exercice 152
Soit m un réel non nul ; on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $(A + I)(A - 2I)$.

2) Soit $B = \dfrac{1}{3}(A + I)$ et $C = \dfrac{1}{3}(A - 2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n (où $n \geq 1$ est un entier quelconque).

3) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C.$$

Exercice 153
Soit A la matrice carrée $(2, 2)$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $A^2 = 2A + 15I$.

2) Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ qu'il existe des entiers a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

3) Donner une expression simple de a_n et de b_n, valable pour tout $n \geq 1$.

Exercice 154
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{250}.

Autour des changements de bases

Exercice 155
Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3$, $f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3$.

1) Vérifier que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, et écrire la matrice de passage de la base $\underline{e}$ à la base $\underline{f}$.

2) Soit v de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$?

3) Soit v de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$?

4) Pour v vecteur de E, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{f}$.
Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.

Exercice 156
Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose $f_1 = e_1 - e_3$ et $f_2 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$.
Pour v vecteur de E, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$.

1) Est-il possible de trouver un f_3 tel que si $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\underline{f}$ est une base de E dans laquelle, pour tout vecteur v de E, la troisième coordonnée de v soit $z' = z$?

2) Même question avec $z' = x - y + z$.

3) Quand la réponse est "oui", déterminer tous les f_3 qui conviennent.

Exercice 157
Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrices à coefficients réels.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, de dimension 3, et soit (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) deux bases de E ; soit F un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 1 et f_1 un vecteur non nul de F.
On suppose que la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est la matrice P.

1) Calculer la matrice P^{-1}.

2) Soit u l'application linéaire de E vers F dont la matrice est A dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1). Déterminer la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et $(5f_1)$.

Exercice 158
Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans $\underline{e}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

1) Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.

2) Calculer la matrice de u dans $\underline{f}$.

3) Calculer A^{100}.

Exercice 159
Dans $E = \mathbf{R}^3$, on note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans $\underline{e}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver un vecteur f_1 non nul tel que $u(f_1) = -2f_1$.
puis un vecteur f_2 non nul tel que $u(f_2) = 4f_2$.

2) Trouver une base f_3 de $\operatorname{Ker} u$.

3) Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, et écrire la matrice de passage de $\underline{e}$ à $\underline{f}$.

4) Calculer A^{100}.

Exercice 160
Soit u l'endomorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2i & -2i & 1 \\ 2(1+i) & 1+2i & -1+i \\ 1+2i & 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = -ie_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2 + ie_3$.

1) Montrer que la famille $\underline{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbf{C}^3$.

2) Ecrire la matrice de passage P de $\underline{e}$ à $\underline{e}'$ et calculer son inverse.

3) Déterminer la matrice B de u dans la base $\underline{e}'$.

4) Montrer que la matrice B est inversible, et calculer B^{-1}. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

5) Calculer B^2. Que peut-on en déduire pour A^2 ?

Exercice 161
Dans cet exercice, on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{C}^3$ (en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$).
Soit V l'ensemble des matrices de la forme :

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

avec a, b, c complexes.

1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,3}$ des matrices carrées $(3,3)$ à coefficients complexes.

2) On pose $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + je_2 + j^2e_3$ et $e'_3 = e_1 + j^2e_2 + je_3$. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbf{C}^3$. Expliciter la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (e'_1, e'_2, e'_3).

Dans les questions suivantes, on notera P la matrice de passage qu'on vient de calculer.

3) On note Q la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit PQ ; en déduire une expression explicite de la matrice P^{-1}.

4) On pose $A = M_{0,1,0}$, et on note u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = M_{0,1,0}$. Calculer les vecteurs $u(e'_1)$, $u(e'_2)$ et $u(e'_3)$ en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3.

5) Expliciter la matrice $P^{-1}AP$.

6) Calculer A^n pour n entier ($n \geq 1$).