Intégrales généralisées.

Exercice 234
Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$\int_2^{+\infty} \ln t dt, \int_0^2 \ln t dt, \int_0^{+\infty} e^{-4t} dt, \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt, \int_0^{+\infty} \frac{t^3+2}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt,$$

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\, dt, \int_2^{+\infty} (1-\cos(1/t))\, dt, \int_0^1 (2+\sin(1/t))\, dt, \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln(\cos(1/t))\, dt$$

Exercice 235
Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\, dt \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\, dt \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2}\, dt \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(t^4+1)^3}\, dt$$

$$I_5 = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\, dt \quad I_6 = \int_0^{1/2} \ln\left(\frac{1}{1-3t+2t^2}\right) dt \quad I_7 = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\, dx$$

Exercice 236
Soit a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs de la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a (\ln t)^b} dt$. On pourra :
a) Lorque $a \neq 1$, trouver facilement la réponse en utilisant les résultats classiques cités en cours.
b) Lorque $a = 1$, calculer explicitement $\displaystyle\int_2^{A} \frac{1}{t(\ln t)^b} dt$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.

Exercice 237
a) Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.
b) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$.
c) Pour $X \in]0,1[$, démontrer l'égalité :

$$\int_0^X \frac{xdx}{\ln(x)} = \int_0^{X^2} \frac{dx}{\ln(x)}$$

d) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^X \frac{x-1}{\ln(x)} dx$, et montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$.

Exercice 238
Soit f et g deux fonctions continues et strictement positives toutes deux définies sur un même intervalle $[a,b[$ (où b peut être un réel ou désigner $+\infty$), équivalentes au voisinage de b.
On sait bien sûr qu'alors les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.
Montrer que si ces intégrales convergent, alors $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_x^b g(t)dt$ sont équivalentes lorsque x tend vers b par valeurs strictement inférieures.

Exercice 239
Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que $f(t)$ admet une limite réelle a quand $t \to +\infty$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t+1)-f(t)]dt$ converge, et préciser sa valeur.

Exercice 240
1) Donner un exemple de fonction intégrable sur $\mathbf{R}^+$ qui ne tende pas vers 0 à l'infini.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^+$ vers $\mathbf{R}$. On suppose que les fonctions f et $(f')^2$ sont toutes deux intégrables sur $\mathbf{R}^+$.

2) Montrer pour tout $x \geq 1$ l'identité :

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x-1}^{x} (t-x+1)f'(t)\,dt.$$

3) Montrer pour tout $x \geq 1$ la majoration :

$$|f(x)| \leq \int_{x-1}^{x} |f(t)|\,dt + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int_{x-1}^{x} (f'(t))^2\,dt\right)^{1/2}.$$

4) Conclure que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 241

1) Montrer que pour tout $u \geq 0$, $ue^{-u} \leq \dfrac{1}{e}$.

2) Pour $K > 0$ et x réel, on notera $\varphi_K(x) = e^{-Kx^2}$.
Montrer que pour tout y réel :

$$|\varphi_K''(y)| \leq \left(2 + \frac{4}{e}\right) K \leq 4K.$$

3) Soit x un réel et $h \neq 0$ un réel.
Écrire la formule de Taylor avec reste de Lagrange à l'ordre 2 pour φ_K entre x et $x+h$ et en déduire la majoration suivante :

$$\left|\frac{e^{-K(x+h)^2} - e^{-Kx^2}}{h} + 2xKe^{-Kx^2}\right| \leq 2|h|K.$$

4) Pour tout x réel, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,dt.$$

Montrer que, quand h tend vers 0 (avec $h \neq 0$) :

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + 2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,dt\right| \to 0.$$

En déduire que f est dérivable et que pour tout x on peut écrire :

$$f'(x) = -2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,dt.$$

5) Pour x réel, on pose :

$$g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

Montrer que g est dérivable, puis que $g' = -f'$.

6) Montrer que pour tout x réel, $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 242
Pour les x réels qui donnent un sens à cette expression, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dx.$$

1) Préciser pour quels x ceci a un sens, et montrer que pour tout tel x, on a l'identité : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2) Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \geq 1$.
3) Pour tout $n \geq 1$, on note :

$$I_n = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Montrer que I_n tend vers $\Gamma(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
4) En faisant le changement de variable $y = t/n$ dans I_n, montrer par récurrence l'identité :

$$I_n = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

puis en déduire que pour tout x du domaine de définition de Γ :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{(1+\frac{1}{k})^x}{1+\frac{x}{k}} \right).$$

Exercice 243
Soit f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ une fonction continue et périodique ; on notera T une période de f.
On note ensuite :

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \qquad \text{puis} \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt - xI.$$

1) Montrer que g est T-périodique et est de classe $\mathcal{C}^1$.
2) Par une intégration par parties, montrer que pour $a > 0$ fixé, l'intégrale généralisée :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t) - I}{t}\, dt$$

converge comme intégrale impropre.
3) Montrer que quand x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(t) - I}{t}\, dt = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 244
1) Soit $\alpha > 0$.
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ converge.
En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$ converge (intégrer par parties).
2) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ diverge (linéariser $\sin^2 t$). En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.
3) Vérifier que quand $t \to +\infty$,

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \sim \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}$$

mais que pourtant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}\right) dt$ ne sont pas de même nature.