Université Claude Bernard - Lyon 1 Printemps 2011

Math II - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 2

---

*L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer*

---

**Exercice 1**

1) Soit $a$ un réel fixé. Calculer un développement limité à l'ordre 5 de :

$$(\cos x)(\operatorname{ch} x)^a \qquad \text{quand } x \to 0.$$

2) Déterminer des équivalents simples de $\ln\big((\cos x)(\operatorname{ch}^3 x)\big)$ et de $\ln((\cos x)(\operatorname{ch} x))$ quand $x$ tend vers 0.

3) Montrer qu'il existe une et une seule valeur de $a$, qu'on déterminera, telle que pour tout $b$ réel différent de $a$ :

$$(\cos x)(\operatorname{ch} x)^a - 1 = o\big((\cos x)(\operatorname{ch} x)^b - 1\big) \text{ quand } x \to 0.$$

**Exercice 2**

Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les deux sous-ensembles $E$ et $F$ respectivement définis par :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

1) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

Dans la suite de l'exercice, on admettra sans expliciter pourquoi que $F$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, de même dimension que $E$.

2) Déterminer une base de $E \cap F$, qu'on notera $(f_1)$ dans la suite de l'exercice.

3) Déterminer une base de $E$ qui soit de la forme $(f_1, f_2)$ et une base de $F$ qui soit de la forme $(f_1, f_3)$.

4) Montrer que, si $f_2$ et $f_3$ sont les vecteurs explicités à la question précédente, $(f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

**Exercice 3**

Soit $\varphi$ l'application de $\mathbf{C}^2$ vers $\mathbf{C}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{C}^2$ par :

$$\varphi(x, y) = (x + y, -x + y).$$

1) Montrer que $\varphi$ est une application linéaire entre $\mathbf{C}$-espaces vectoriels.

Dans la suite de l'exercice, on note $u = (1, i)$ et $v = (1, -i)$.

2) Montrer que $(u, v)$ est une base de $\mathbf{C}^2$.

3) Montrer que $(u, \varphi(u))$ est lié, et qu'il en est de même de $(v, \varphi(v))$.

4) a) Soit $e$ un élément de $\mathbf{C}^2$ tel que $(e, \varphi(e))$ soit lié. En écrivant $e = \alpha u + \beta v$ pour des complexes $\alpha$ et $\beta$, montrer que $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

b) En déduire que si $e$ est un élément non nul de $\mathbf{C}^2$ de la forme $(x, y)$ où $x$ et $y$ sont **réels**, alors $(e, \varphi(e))$ est une famille libre (dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^2$.) Une solution qui ne déduirait pas ce résultat de la question précédente mais le prouverait indépendamment sera également acceptée.

**Exercice 4**
Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1) Si
$$f(x) = o(x^2) \text{ et } g(x) = o(x^2) \qquad \text{quand } x \to 0,$$
alors il existe un intervalle ouvert contenant 0 sur lequel $f - g = 0$.

2) Si
$$f(x) = o(x^2) \text{ et } g(x) = o(x^3) \qquad \text{quand } x \to 0,$$
alors
$$f(x) - g(x) = o(x^2 - x^3) \qquad \text{quand } x \to 0.$$

3)
$$\operatorname{Arctan} x \sim x - \frac{x^3}{6} \qquad \text{quand } x \to 0.$$

4) Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ en 0, alors $f = O(h)$ en 0.

5) Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$. Il existe une et une seule application linéaire $u$ de $E$ vers $F$ telle que $\operatorname{Ker} u = E$.