Exercice 221
Calculer les déterminants suivants :

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 2a & \sin 2b & \sin 2c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \end{vmatrix} \qquad \text{e)}\ \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 222
Trouver tous les λ complexes tels que $A - \lambda Id$ ne soit pas inversible pour $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 223
Montrer, par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 224
Pour a réel et $n \geq 2$ entier, on note A_n la matrice réelle à n lignes et n colonnes définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & a & \ddots & & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ a & & & a & 1 \\ a & a & \dots & \dots & a \end{pmatrix}.$$

On note D_n le déterminant de A_n.
1) Calculer D_2 et D_3.
2) Soit $n \geq 3$ un entier. Déterminer une relation liant D_n et D_{n-1}.
3) Déduire de la question précédente une expression simple de D_n, valable pour tout $n \geq 2$.
4) Déterminer le rang de A_n selon la valeur du réel a.

Exercice 225
Pour chacune des deux matrices ci-dessous, dire si elle est inversible ou non ; lorsqu'elle l'est, l'inverser à l'aide des déterminants.

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Exercice 226
Résoudre en utilisant les formules de Cramer le système :

$$\begin{cases} x & +ay & -a^2 z & = a^4 \\ x & +by & -b^2 z & = b^4 \\ x & +cy & -c^2 z & = c^4 \end{cases}.$$

Exercice 227
Soit m un réel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 3m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de A.

2) Discuter, en fonction de la valeur de m, des dimensions respectives du noyau et de l'image de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice est A dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 228
Soit a et b deux nombres complexes non tous deux nuls. On considère la matrice (n,n)

$$1 = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le déterminant de A (on pourra commencer le calcul en ajoutant toutes les colonnes autres que la première à la première).

2) Montrer que le rang de la matrice A est n lorsque son déterminant n'est pas nul, et $n-1$ lorsque son déterminant est nul.

Exercice 229
Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ des réels.
On considère le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1) Montrer que $D_n = a_1 x^{n-1} + D_{n-1}$; où D_{n-1} désigne le déterminant construit comme D_n, mais sans la première colonne ni la deuxième ligne.

2) Calculer D_n.

Exercice 230
Montrer que si deux matrices carrées non nulles sur un corps commutatif vérifient $AB = 0$ alors elles sont toutes deux de déterminant nul.

Exercice 231
Montrer qu'en dimension impaire, une matrice antisymétrique à coefficients complexes n'est pas inversible.

Exercice 232
Soit A une matrice carrée (n,n) à coefficients réels telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair. Donner un exemple d'une telle A pour $n = 2$.

Exercice 233

1) Montrer que le déterminant d'une matrice carrée à coefficients entiers est entier.

2) Montrer que le déterminant d'une matrice carrée (n,n) à coefficients entiers impairs est divisible par 2^{n-1}.