Exercice 1

1) Question banale. Une solution élégante est d'utiliser les matrices : notons f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

puis de constater en écrivant son expression en termes de composantes que $f = u$. On en déduit en particulier que u est linéaire.

2) Simple calcul sans surprises. On est supposé trouver $((4, 4, 3, 3))$ (ou un autre vecteur non nul proportionnel à celui-ci si on est original). La dimension du noyau est 1.

3) Le rang s'obtient par la formule du même nom. C'est 3. L'image est un sous-espace de $\mathbf{R}^3$ de dimension 3 donc est égale à $\mathbf{R}^3$.

4) On regarde le noyau de v. Un vecteur x de F est dans ce noyau si et seulement si $v(x) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $u(x) = 0$, c'est-à-dire si et seulement s'il est dans l'intersection $F \cap \operatorname{Ker} u$. Comme F est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ cette intersection est réduite à $\{0\}$ donc x est nul. Le noyau de v est donc réduit à $\{0\}$ et v est injective. Par ailleurs la dimension de F s'obtient par la formule de Grassmann, et c'est 3, puis la formule du rang donne en cascade la dimension de $\operatorname{Im} v$ et c'est 3. Par le même argument que pour u à la question précédente, v est donc bijective.

Exercice 2

1) On s'empresse de poser $h = x - 1$ et donc $x = h + 1$. Avec cette notation, h tend vers 0 quand x tend vers 1, d'où le calcul :

$$\ln(1 + x) = \ln(2 + h) = \ln[2(1 + \frac{h}{2})] = \ln 2 + \ln(1 + \frac{h}{2}) = \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2).$$

2) On fait le même changement de variable dans les autres morceaux de l'expression :

$$(\ln 2) \sin(\frac{\pi}{2} x) = (\ln 2) \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} h) = (\ln 2) \cos(\frac{\pi}{2} h) = \ln 2 - \frac{\pi^2 \ln 2}{8} h^2 + o(h^2)$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{1 + h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$$

et on somme tout ça :

$$\ln(1 + x) - (\ln 2) \sin(\frac{\pi}{2} x) - \sqrt{x} + 1 = \frac{\pi^2 \ln 2}{8} h^2 + o(h^2) \sim \frac{\pi^2 \ln 2}{8} h^2$$

(le tout quand x tend vers 1, c'est-à-dire quand h tend vers 0).

On a trouvé l'équivalent demandé, pour la valeur $C = \dfrac{\pi^2 \ln 2}{8}$.

3) On en fait de même en bas :

$$e^x - ex = e^{1+h} - e - eh = ee^h - e - eh = e(1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)) - e - eh = \frac{eh^2}{2} + o(h^2) \sim \frac{eh^2}{2}.$$

Yapluka quotienter les deux équivalents explicités, l'expression se révèle avoir une limite, celle-ci étant :

$$\frac{\pi^2 \ln 2}{4e}.$$

Exercice 3

1) Simple vérification rasante en revenant aux définitions avec des exponentielles.

2) Quand y tend vers $+\infty$, $e^{-y} = o(1) = o(e^y)$, donc $\operatorname{ch} y = \dfrac{1}{2}e^y + o(e^y) \sim \dfrac{1}{2}e^y$.

3) Quand x tend vers $+\infty$, et en ne travaillant qu'avec des $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x\left(1+\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})\right) = x+\frac{1}{2}+o(1).$$

Calcul parfaitement analogue pour l'autre.

4) Vu les calculs qui précèdent :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\,)\right) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) \to \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{quand } x \to +\infty.$$

5) Toujours vu les calculs qui précèdent, mais de façon un peu plus subtile :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\,)\right) = \operatorname{ch}\left(x+o(1)\right) \sim \frac{1}{2}e^{x+o(1)} = \frac{1}{2}e^{o(1)}e^x \sim \frac{1}{2}e^x \qquad \text{quand } x \to +\infty.$$

6) Grâce à la formule de la question 1, on exprime l'expression à étudier comme un produit dont, heureux hasard, on a traité un facteur en question 4 et l'autre en question 5. En rapprochant tout ça, on trouve l'équivalent :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)e^x \qquad \text{quand } x \to +\infty.$$

Exercice 4

1) Soit $\epsilon > 0$. Appliquons la définition de l'uniforme continuité de f à $\epsilon/3$. Elle nous fournit un $\eta > 0$ tel que, si x et y sont deux réels vérifiant $|x-y| \leq \eta$ il soit garanti que $|f(x)-f(y)| \leq \epsilon/3$. Mais ceci peut se réécrire $|(3f)(x)-(3f)(y)| \leq \epsilon$. Victoire !

2) Soit encore $\epsilon > 0$. Appliquons cette fois la définition de l'uniforme continuité de f à $\epsilon/2$ produisant un $\eta_f > 0$ tel que, si x et y sont deux réels vérifiant $|x-y| \leq \eta_f$ on puisse être sûr que $|f(x)-f(y)| \leq \epsilon/2$. Puis recommençons avec g, produisant de façon analogue un η_g.
On pose alors $\eta = \operatorname{Min}(\eta_f, \eta_g)$, qui est strictement positif puisqu'égal soit à η_f soit à η_g.
Pour $|x-y| \leq \eta$, on a alors simultanément $|x-y| \leq \eta_f$ et $|x-y| \leq \eta_g$ d'où on déduit :

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |[f(x)-f(y)]+[g(x)-g(y)]| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Encore gagné !