Exercice 1

1) On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b \\ -b \end{pmatrix}$.
On voit donc que, si on prend $a = 1$ et $b = 1$, :

$$B\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

soit $BP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout n, $D^n = I + (2^n - 1)E$. Alors $B^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P[I + (2^n - 1)E]P^{-1} = I + (2^n - 1)PEP^{-1}$. En faisant $n = 1$, on obtient $B = I + PEP^{-1}$ dont on tire $PEP^{-1} = B - I = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et finalement :

$$B^n = I + (2^n - 1)\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3(2^n - 1) & 6(2^n - 1) \\ 1 - 2^n & 1 + 2(1 - 2^n) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1) a) $E_1 = \mathrm{Ker}(f - Id)$ (et $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$).

b) Stupides calculs de rang, on doit trouver 1 pour les trois.

c) Si λ, μ et ν sont réels tels que $\lambda e_0 + \mu e_1 +_n ue_2 = 0$, on applique f à cette identité pour obtenir : $\mu e_1 + 2\nu e_2 = 0$ puis on applique $f - Id$ à cette nouvelle identité qui fournit $2\nu e_2 = 0$. On conclut que $\nu = 0$ puis, revenant en arrière, que $\mu = 0$ et enfin que $\lambda = 0$. Le système (e_0, e_1, e_2) est donc un système libre de trois vecteurs dans l'espace $\mathbf{R}^3$ qui est de dimension 3 : c'en est une base.
La matrice demandée, qu'on notera A' est alors :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) a) Pour $k = 0, 1$ ou 2, si $x \in E_k$, $(f - kId)[g(x)] = (f \circ g)(x) - kg(x) = (g \circ f)(x) - kg(x) = g[(f - kId)(x)] = g(0) = 0$, donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(f - kId) = E_k$.

b) Dans la k-ème colonne de la matrice B, tous les termes sauf éventuellement le k-ème sont donc nuls : ceci prouve que B est diagonale.

3) a) La matrice cherchée est $\lambda A'^2 + \mu A' + \nu I$ donc c'est :

$$C = \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \mu + \nu & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda + 2\mu + \nu \end{pmatrix}.$$

b) Il existe des λ, μ et ν qui satisfont à l'hypothèse si et seulement si le système qui identifie les trois coefficients diagonaux de C aux trois coefficients diagonaux de B, soit b_{11}, b_{22} et b_{33} a des solutions. La matrice associée à ce système est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et un calcul immédiat vérifie que son rang est 3. Le système a donc des solutions. Pour ces valeurs λ, μ et ν, les deux endomorphismes g et $\lambda f^2 + \mu f + \nu Id$ ont la même matrice dans la base (e_0, e_1, e_2) : ils sont donc égaux.

Exercice 3

1) $(1+\tan\varphi)^2\cos^2\varphi = \left(\cos\varphi + \cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 = (\cos\varphi+\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi+2\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi = 1+\sin(2\varphi)$.

2) Comme suggéré, on pose $t = \tan\varphi$ donc $dt = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$. Alors :

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \frac{d\varphi}{(1+\tan\varphi)^2\cos^2\varphi} = \int_{t=0}^{t=1} \frac{dt}{(1+t)^2} = -\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4

1) Pour tout x réel, $G'(x) = e^{x^2}$ (la fonction intégrée est continue). La dérivée G' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions de cette classe, donc la fonction intiale G l'est aussi.

2) Pour tout x réel, $H'(x) = e^{-x^2}G'(x) - 2xe^{-x^2}G(x) = 1 - 2xH(x)$, qu'on peut regrouper en :

$$H'(x) + 2xH(x) = 1.$$

3) a) Pour tout t de $\mathbf{R}^*$, on calcule :

$$F'(t) = e^{t^2} - \frac{e^{t^2}}{2t^2}.$$

b) Pour $t \in [0, x/2]$, on a l'encadrement $0 \leq t^2 \leq x^2/4$ dont on déduit : $0 \leq e^{t^2} \leq e^{x^2/4}$. En intégrant cet encadrement entre 0 et $x/2$ (par rapport à la variable t) on obtient l'encadrement demandé.

c) Pour $x/2 \leq t$, $x^2/4 \leq t^2$ donc, après prise de l'inverse puis de l'opposé (et multiplication par 2), et après avoir finalement ajouté 1 des deux côtés de l'inégalité, on peut écrire :

$$1 - \frac{2}{x^2} \leq 1 - \frac{1}{t^2} \leq 1.$$

Il n'y a plus qu'à multiplier par le nombre positif e^{t^2} pour aboutir.

d) On intègre l'encadrement du c) par rapport à la variable t entre $x/2$ et x, en reconnaissant dans le terme central de cet encadrement le $F'(t)$ préparé au a).

e) Pour l'inégalité de gauche, il convient d'additionner l'inégalité de gauche du b) et l'inégalité de droite du d) puis de remplacer $F(x/2)$ par son expression, soit $F(x/2) = \dfrac{e^{x^2/4}}{x}$.

Pour l'inégalité de droite, on majore le $-F(x/2)$ par 0 dans l'inégalité de gauche du d) obtenant ainsi l'inégalité plus simple :

$$\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\int_{x/2}^{x} e^{t^2}\,dt \leq F(x).$$

Dans celle-ci, on divise les deux côtés par $1 - 2/x^2$ (qui est strictement positif grâce à l'hypothèse $\sqrt{2} < x$), on ajoute l'inégalité de droite du b) et on est arrivé à bon port.

f) On divise l'encadrement qui précède par $F(x)$, qu'on remplace par son expression explicite à gauche et à droite. Il n'est alors pas trop difficile de voir qu'on a encadré G/F entre deux gendarmes qui tendent vers 1 - je n'écris pas les détails.