1) Un calcul très facile mène à constater que $u \circ u = u$.

2) L'image $\operatorname{Im} u$ est ici une droite et une base en est $((1, -2, 3))$. Le noyau $\operatorname{Ker} u$ est ici d'équation $x+y=0$; c'est un plan dont on peut donner tout plein de bases différentes, par exemple $((1, -1, 0), (0, 0, 1))$.

3) Une solution est de confronter la forme paramétrique de $\operatorname{Im} u$ vu comme ensemble des $(\alpha, -2\alpha, 3\alpha)$ (α parcourant $\mathbf{R}$) à l'équation cartésienne de $\operatorname{Ker} u$: un vecteur de $\operatorname{Im} u$ présenté sous forme paramétrique est dans le noyau si et seulement si $\alpha + (-2\alpha) = 0$ soit si et seulement si $\alpha = 0$. Ceci montre que l'intersection se réduit au vecteur nul.

4) Il est clair que $\{0\}$ est inclus dans l'intersection, comme dans tout sous-espace vectoriel de E. Dans l'autre sens, soit y un vecteur de $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$. Comme y est dans l'image, il existe un x tel que $y = u(x)$. Comme y est dans le noyau, $u(y) = 0$, soit $u[u(x)] = 0$. Comme $u \circ u = u$, ceci se réécrit $u(x) = 0$ et donc $y = 0$.

5) Il est clair que y est dans l'image, puisqu'il a un antécédent, à savoir x. Pour vérifier que z est dans le noyau, on regarde $u(z) = u[x - u(x)] = u(x) - u[u(x)] = u(x) - u(x) = 0$.

6) Soit x un vecteur de E. Par la question précédente, on peut écrire $x = y+z$ où y est dans l'image et z dans le noyau. Les familles (e_1) et $(f_1, \ldots, f_k)$ étant respectivement génératrices de l'image et du noyau, on peut ensuite écrire $y = \alpha e_1$ et $z = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_k f_k$ pour des scalaires $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k$. Les deux informations mises bout à bout décrivent x comme combinaison linéaire de $(e_1, f_1, \ldots, f_k)$. Cette famille est donc génératrice.
Cette famille génératrice est composée de $k+1$ vecteurs, et on sait qu'en dimension n une famille génératrice est toujours composée d'au moins n vecteurs. Ceci prouve que $n \leq k+1$ donc que $n-1 \leq k$.

7) Puisque k est la dimension d'un sous-espace de E qui est de dimension n, cet entier est inférieur ou égal à n. Vu la question précédente, il est supérieur ou égal à $n-1$: de deux choses l'une, ou bien $k = n-1$, ou bien $k = n$.
Mais si k était égal à n, ceci signifierait que le noyau de u est un sous-espace de E de même dimension que E, donc qu'il est égal à E. L'endomorphisme u aurait donc E pour noyau ; ceci voudrait dire que u est nul. Ce qui contredirait l'hypothèse selon laquelle le rang de u est 1.
Par élimination, c'est donc que $k = n-1$.

8) La vérification de la linéarité est stupide, mais puisqu'elle est demandeée, faisons la : soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)$ deux vecteurs et λ un scalaire.
Alors :

$$\begin{aligned} u_k[(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n)] &= u_k[(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)] = (0, \ldots, 0, x_k + x'_k, 0, \ldots, 0) \\ &= (0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0, x'_k, 0, \ldots, 0) \\ &= u_k[(x_1, \ldots, x_n)] + u_k[(x'_1, \ldots, x'_n)] \end{aligned}$$

et calcul du même style pour la multiplication externe.
Pour le rang, on constate que l'image de u_k est l'espace engendré par le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$: c'est donc une droite, et le rang de u_k est bien 1.
Enfin si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur,

$$\begin{aligned} (u_1 + \cdots + u_n)[(x_1, \ldots, x_n)] &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, x_n) = Id[(x_1, \ldots, x_n)] \end{aligned}$$

et donc $u_1 + \cdots + u_n = Id$.

9) Si y est dans l'image de $u_k \circ f$ il existe un x tel que $y = u_k(f(x))$. Si on pose $x' = f(x)$, on constate alors que $y = u_k(x')$ donc que $y \in \operatorname{Im} u_k$. L'espace $\operatorname{Im}(u_k \circ f)$ est donc un sous-espace vectoriel de la droite $\operatorname{Im} u_k$: il est donc de dimension 0 ou 1 ; dit autrement, le rang de $u_k \circ f$ est 0 ou 1.

10) On écrit l'identité proposée puis on la développe (c'est possible par définition de la somme d'applications). On obtient la représentation :

$$f = u_1 \circ f + \cdots + u_k \circ f.$$

Dans cette écriture, tous les termes sont soit de rang 1, soit de rang 0 donc nuls. On efface par la pensée ceux qui sont nuls ; il reste forcément quelque chose car on a supposé f non nul. L'écriture obtenue est alors une représentation de f comme somme de pièces qui sont de rang 1.

11) Soit x un élément de E. Puisque (a) est une base de $\operatorname{Im} u$, on peut écrire le vecteur $\varphi(x)$ d'une façon et d'une seule comme combinaison linéaire de (a) c'est-à-dire sous la forme λa. Si φ existe, la valeur $\varphi(x)$ est forcément ce λ, ce qui prouve son unicité ; si maintenant on pose $\varphi(x) = \lambda$ on a construit une φ qui répond à la condition de l'énoncé.
La vérification de la linéarité est pénible à taper, quoique très facile, je m'en dispense.

12) Soit x un vecteur de E. On calcule alors :

$$u \circ u(x) = u[u(x)] = u[\varphi(x)a] = \varphi(x)u(a) = \varphi(x)\varphi(a)a = \varphi(a)u(x).$$

On constate donc que $u \circ u = \varphi(a)u$. D'où l'existence du α demandé. L'unicité découle du fait que u n'est pas nul (puisque de rang 1) donc la famille (u) est libre.

13) On peut prendre $a = (1, 1, -3)$. Pour cette valeur de a, l'application linéaire φ est alors $\varphi[(x, y, z)] = 2x + y + z$. Enfin $\alpha = \varphi(a) = 0$.

14) Supposons qu'on ait deux telles écritures. Puisque u n'est pas nul, ni φ, ni ψ, ni a, ni b ne peut être nul. Puisqu'il existe un x tel que $\varphi(x) \neq 0$, pour ce x le fait que $u(x) \in \operatorname{Im} u$ entraîne que $a \in \operatorname{Im} u$. Pour la même raison $b \in \operatorname{Im} u$. Comme a et b sont dans la même droite $\operatorname{Im} u$ et ne sont pas nuls, il existe un λ non nul tel que $a = \lambda b$. Une fois ceci constaté, on voit que pour tout x, $u(x) = (\lambda\varphi(x))b = \psi(x)b$, où le vecteur b n'est pas nul, donc pour tout x, $\lambda\varphi(x) = \psi(x)$ donc $\psi = \lambda\varphi$.

15) (Question difficile !) Les questions précédentes montrent que tout endomorphisme de rang 1 de E peut s'écrire φa où φ est une application linéaire de E vers $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ non nulle et a un vecteur de E non nul. Il est par ailleurs clair que tout tel produit φa est un endomorphisme de E de rang 1. Enfin vu la question immédiatement précédente, il y a autant de façons de représenter ainsi un endomorphisme de rang 1 que de scalaires non nuls, soit $p - 1$. Si on note A le nombre d'applications linéaires non nulles de E vers $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et B le nombre de vecteurs non nuls de E, le nombre cherché est donc $AB/p - 1$. Il n'est pas difficile de déterminer B : en effet l'espace E étant de dimension n, il a p^n vecteurs, donc il y a $p^n - 1$ vecteurs non nuls dans E. Pour déterminer A il faut savoir (le cours l'a-t-il déjà dit ?) que l'espace des applications linéaires de E (de dimension n) vers $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (de dimension 1) est de dimension $n.1 = n$, et a donc lui aussi p^n éléments, dont $p^n - 1$ ne sont pas nuls.
La réponse est donc finalement :

$$\frac{(p^n - 1)^2}{p - 1.}$$