Aide-mémoire de trigonométrie

1 - Trigonométrie proprement dite

a - La formule circulaire :

Pour tout réel θ,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

b - Les dérivées :

Pour θ variant là où ces formules ont un sens,

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \qquad \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta \qquad \frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta.$$

c - Les ensembles de définition, symétries et périodicités :

Le seul ensemble de définition à poser problème est celui de tan.

Il y a des symétries par rapport à 0 et des périodicités, qu'on sait retrouver en mémorisant les courbes représentatives.

Il y a des relations entre sin et cos, qu'on reconstitue également ; notamment le sinus d'un réel θ est égal au cosinus du complémentaire $\frac{\pi}{2} - \theta$.

d - Les formules d'addition :

Pour tous réels α et β pour lesquels les formules ont un sens,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

d'où on déduit des formules de soustraction, et des formules de duplication, à savoir directement par cœur pour ne pas perdre de temps :

pour tout réel θ,

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta.$$

e - Formules plus avancées :

Il ne me semble pas indispensable de savoir par cœur plus de formules que celles énumérées ci-dessus, toutefois savoir qu'un certain nombre de formules existent et même savoir les reconstituer ne peut pas faire de mal :

$\sin 3\theta$ s'écrit simplement en fonction du seul $\sin\theta$;

$\sin\alpha\sin\beta$ s'obtient à partir des formules pour $\sin(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta)$ en les soustrayant et en constatant ce qu'on obtient — variantes possibles évidemment ;

$\sin p + \sin q$ s'obtient en introduisant α et β tels que $p = \alpha+\beta$ et $q = \alpha-\beta$ puis en faisant comme dit au paragraphe précédent — variantes possibles évidemment ;

il existe des formules calculant $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ en fonction de $\tan(\theta/2)$, utiles notamment pour calculer des primitives.

f - Les fonctions réciproques : leurs définitions

Arccos est défini sur $[-1,1]$; pour x dans cet intervalle, $\operatorname{Arccos} x$ est l'unique réel θ de $[0,\pi]$ tel que $\cos\theta = x$.

Arcsin est défini sur $[-1,1]$; pour x dans cet intervalle, $\operatorname{Arcsin} x$ est l'unique réel θ de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin\theta = x$.

Arctan est défini sur $\mathbf{R}$; pour x réel, $\operatorname{Arctan} x$ est l'unique réel θ de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan\theta = x$.

g - Les fonctions réciproques : leurs dérivées

Pour x variant là où ces formules ont un sens

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{Arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{Arctan} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

On prendra garde à ce que pour Arcsin et Arccos, les formules de dérivation ne fonctionnent que dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

h - Les fonctions réciproques : autres formules

Du fait que le sinus de l'arc complémentaire est égal au cosinus, on montre sans mal que pour tout x de $[-1,1]$, on a : $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$.

On sait qu'il n'y a AUCUNE autre formule raisonnablement simple concernant les fonctions trigonométriques réciproques, et que si on en applique une, on se trompe !

2 - Trigonométrie hyperbolique

a - La formule hyperbolique :

Pour tout réel u,

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$$

b - Les dérivées :

Pour u variant dans $\mathbf{R}$,

$$\frac{d}{du}\operatorname{sh} u = \operatorname{ch} u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{ch} u = \operatorname{sh} u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{th} u = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} = 1 - \operatorname{th}^2 u.$$

c - Les ensembles de définition, symétries et périodicités :

Les trois fonctions sont définies sur $\mathbf{R}$.

Il y a des symétries par rapport à 0 , qu'on sait retrouver en mémorisant les courbes représentatives.

Il n'y a pas de relations entre ch et sh (autre que celle du a)), ni de périodicités.

d - Les formules d'addition :

Pour tous réels a et b pour lesquels les formules ont un sens,

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}.$$

d'où on déduit des formules de soustraction, et aussi des formules de duplication qu'on pourra se dispenser de savoir par cœur tant on les retrouve vite et utilise relativement peu souvent.

e - Formules plus avancées :

Tout ce qui est dit en trigonométrie ordinaire se transpose ici.

f - Fonctions réciproques, leurs définitions :

Pour Argsh les choses sont simplissimes : c'est tout simplement la réciproque de sh.

Pour Argth les choses ne sont pas trop compliquées : il suffit de se souvenir qu'elle est définie sur $]-1,1[$ (c'est-à-dire l'intervalle image de $\mathbf{R}$ par th) ; elle est alors simplement caractérisée par : $\operatorname{Argth} x$ est l'unique u réel tel que $\operatorname{th} u = x$.

Pour Argch les choses sont aussi compliquées qu'en trigonométrie ordinaire, puisqu'il faut à la fois restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de ch pour obtenir une bijection. On se souviendra donc soigneusement que Argch est définie sur $[1,+\infty[$ (c'est-à-dire sur l'intervalle image de $\mathbf{R}$ par ch) et est caractérisée par : $\operatorname{Argch} x$ est l'unique u réel positif tel que $\operatorname{ch} u = x$ (ne pas oublier le "positif").

On se souviendra (éventuellement...) qu'il existe des formules (qu'il n'est pas demandé d'apprendre) permettant d'exprimer les fonctions réciproques avec des racines carrées et des logarithmes ; ceci explique qu'on les rencontre assez peu souvent.

g - Les fonctions réciproques : leurs dérivées sont données, pour x variant dans les intervalles où ces formules ont un sens, par :

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Argsh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{Argch} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{Argth} x = \frac{1}{1-x^2}.$$

On prendra garde à ce que pour Argch, la formule de dérivation ne fonctionne que dans l'intervalle ouvert $]1,+\infty[$.