Aide-mémoire de primitivation

1 - Des primitives à connaître sans faute !

$$\int e^t\,dt = e^t + C \qquad \int \cos t\,dt = \sin t + C \qquad \int \sin t\,dt = -\cos t + C$$

$$\int t^\alpha\,dt = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C \qquad \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \mathrm{Arctan}\,t + C$$

$$\int \mathrm{ch}\,t\,dt = \mathrm{sh}\,t + C \qquad \int \mathrm{sh}\,t\,dt = \mathrm{ch}\,t + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \mathrm{Arcsin}\,t + C$$

Et des qu'il n'est pas sain de ne pas connaître

$$\int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \tan t + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 t}\,dt = -\,\mathrm{cotan}\,t + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \mathrm{Argsh}\,t + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \mathrm{Argch}\,t + C \quad (\text{pour } t > 1)$$

Et quelques pour les mémoires musclées

$$\int \ln t\,dt = t\ln t - t + C$$

$$\int \frac{1}{\cos t}\,dt = \ln|\tan(t/2+\pi/4)| + C \qquad \int \frac{1}{\sin t}\,dt = \ln|\tan(t/2)| + C$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right) + C \quad (a \neq 0) \qquad \int \frac{1}{t^2-a^2}\,dt = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$$

2 - La formule d'intégration par parties :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

et surtout les cas où elle est opportune :

* Présence d'une fonction dont la dérivée serait notablement plus simple, notamment un Arctan ou un ln.

* Présence d'un polynôme en facteur dont le degré descendrait avec plaisir si on le dérivait.

* Magouille indicible pour primitiver les $\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$.

3 - La technique de changement de variables :

(je n'écris pas la formule, tant les abus de langage la rendent opaque)

Mais il faut avoir en tête tout d'abord trois conséquences immédiates souvent directement utilisables :

$$\int u'(t)e^{u(t)}dt = e^{u(t)} + C \qquad \int u'(t)[u(t)]^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}[u(t)]^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{u'(t)}{u(t)}dt = \ln|u(t)| + C$$

ainsi que les changements de variable "qui marchent" souvent :

* Dans une expression contenant un $\sqrt{at+b}$ (ou même plus généralement un $\sqrt{\dfrac{at+b}{ct+d}}$, prendre cette expression comme nouvelle variable.

* Dans une expression contenant un $\sqrt{1-t^2}$, poser $t = \sin\theta$ (ou $t = \cos\theta$) en prenant θ dans un intervalle raisonnable pour pouvoir utiliser des Arcsin (ou des Arccos).

* De même pour $\sqrt{t^2+1}$, poser $t = \mathrm{sh}\,u$.

* Enfin pour $\sqrt{t^2-1}$, poser (selon le signe de t), $t = \pm\,\mathrm{ch}\,u$.

* Dans une expression trigonométrique en $\sin t$ et $\cos t$, fonction impaire de t, essayer $u = \cos t$.

* Dans une expression trigonométrique en $\sin t$ et $\cos t$, fonction π-périodique de t, essayer $u = \tan t$.

* Dans une expression trigonométrique en $\sin t$ et $\cos t$, fonction f de t vérifiant l'étrange symétrie : $f(\pi - t) = -f(t)$, essayer $u = \sin t$.

* Dans une expression trigonomérique en $\sin t$ et $\cos t$ vraiment compliquée, essayer $u = \tan(t/2)$ (ou, pire, si l'intervalle d'étude contient des multiples impairs de π, $u = \mathrm{cotan}(t/2)$!).

* Dans chacun des quatre cas qui précèdent, s'attendre à ne pas avoir besoin d'expliciter la bijection réciproque du changement de variables pratiqué, et ne pas se précipiter, donc, pour l'expliciter.

4 - Que faire face à une fraction rationnelle ? Primitivation de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

A) Exécuter une décomposition en éléments simples.

a) Si le degré de P est supérieur ou égal au degré de Q, commencer par une division euclidienne, pour se ramener à un degré strictement plus petit en haut qu'en bas.

b) Factoriser Q.

c) Connaître et expliciter, en nommant les coefficients, la forme sous laquelle on peut transformer $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en une somme d'éléments "simples".

d) Pour trouver le coefficient de $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, où $(x-a)$ apparaît exactement à la puissance n dans Q, multiplier l'identité du c) par $(x-a)^n$ et faire tendre x vers a dans l'identité obtenue.

e) Pour trouver les coefficients manquants, les deux trucs suivants sont agréables :

* Multiplier l'identité du c) par x et faire tendre x vers $+\infty$.

* Appliquer l'identité du c) à un x choisi pour la simplicité des calculs (fort souvent bien sûr on prendra $x = 0$).

f) On peut aussi parfois trouver des relations entre les coefficients en profitant de la parité ou de l'imparité de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

g) Si certains coefficients résistent encore, et que le dénominateur contient une puissance relativement élevée de x, soit $Q(x) = x^N T(x)$, faire une division selon les puissances croissantes de P par T en s'arrêtant quand le reste commence par x^N.

h) Si c'est une grosse puissance de $x-b$ qui figure dans le dénominateur, en faisant le changement de variables $y = x - b$ se ramener au g).

B) Trouver une primitive de chaque élément simple

a) Les éléments simples correspondant à des $\dfrac{1}{(x-a)^n}$ ne devraient pas poser trop de problèmes.

b) Pour ceux de la forme $\dfrac{ax+b}{T^n(x)}$, où T est du second degré et ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, mettre T sous "forme canonique", puis, par un changement de variables, se ramener à la primitivation de $\dfrac{cy+d}{(y^2+1)^n}$. Trouver une primitive de $\dfrac{y}{(y^2+1)^n}$ est facile, de $\dfrac{1}{y^2+1}$ aussi, reste si l'auteur de l'exercice est un vicieux à savoir trouver une primitive de $\dfrac{1}{(y^2+1)^n}$ $(n \geq 2)$: c'est une application de l'intégration par parties.