et les fonctions Boréliennes positives sur $\mathbb{R}^n$ s'intègrent « par tranches », en utilisant uniquement l'intégrale de Lebesgue des fonctions d'une variable réelle.

4.2 - THÉORÈME DE FUBINI

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, et notons $\mu\otimes\nu$ la mesure produit sur $X\times Y$. Les fonctions $\mu\otimes\nu$-intégrables sur $X\times Y$ sont des fonctions qui sont mesurables par rapport à la tribu complétée de $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, de sorte que, pour étudier les questions de $\mu\otimes\nu$-intégrabilité sur $X\times Y$, il nous faut étendre le théorème 4.1.8 et la propriété (ii) du théorème 4.1.5 au cas des fonctions $\mu\otimes\nu$-mesurables positives sur $X\times Y$. A cet effet, nous utiliserons les résultats suivants :

4.2.1 - Proposition - Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Pour toute fonction numérique $\mu\otimes\nu$-mesurable $f : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, il existe une fonction numérique $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-mesurable $g : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et un ensemble $N\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ vérifiant $(\mu\otimes\nu)(N)=0$, tels que l'on ait :

$$\forall (x,y)\notin N, \quad f(x,y) = g(x,y).$$

Démonstration. Quitte à considérer séparément les parties positive et négative f^+ et f^- de f, on peut sans perte de généralité supposer que f est une fonction numérique positive. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\mu\otimes\nu$-mesurables simples et positives telle que

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$$

pour tout $(x,y)\in X\times Y$. Montrons qu'il existe, pour tout entier $n\geq 1$, une fonction $g_n : X\times Y \to [0,+\infty]$ $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-mesurable et un sous-ensemble N_n de $X\times Y$, $N_n\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, tels que

$$f_n(x,y) = g_n(x,y) \quad \text{quel que soit } (x,y)\notin N_n.$$

A cet effet, écrivons :

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{E_i}$$

où les λ_i sont des réels ≥ 0 et où les E_i sont des ensembles $\mu\otimes\nu$-mesurables deux à deux disjoints. Pour tout i, il existe $F_i \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ et Z_i $\mu\otimes\nu$-négligeable, disjoint de F_i, tels que :

$$E_i = F_i \cup Z_i \, .$$

On a :

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{E_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{F_i} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{Z_i} \, ,$$

de sorte que, si l'on pose $g_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{F_i}$, et si l'on note N_n un élément de $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ contenant l'ensemble $\mu\otimes\nu$-négligeable $\bigcup_{i=1}^{k} Z_i$ et vérifiant $(\mu\otimes\nu)(N_n) = 0$, on a :

$$f_n(x,y) = g_n(x,y) \quad \text{pour } (x,y) \notin N_n \, .$$

En outre, la fonction g_n est $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-mesurable. Posons $N = \bigcup_{n\geq 1} N_n$; on définit ainsi un élément de $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ qui vérifie $(\mu\otimes\nu)(N) = 0$. Soit $g = f\,\mathbb{1}_{N^c}$; on a $g(x,y) = f(x,y)$ pour $(x,y) \notin N$ et, comme

$$g(x,y) = \lim_{n\to\infty} (g_n \mathbb{1}_{N^c})(x,y)$$

pour tout $(x,y) \in X\times Y$, où g_n est $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-mesurable et $N \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, on en déduit que g est $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-mesurable. La proposition est ainsi démontrée. ■

<u>4.2.2. Proposition</u>. <u>Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $N \subset X\times Y$ un sous-ensemble $\mu\otimes\nu$-négligeable. Alors, N_x est ν-négligeable pour μ-presque tout x, et N_y est μ-négligeable pour ν-presque tout y.</u>

<u>Démonstration</u>. Soit $Z \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ tel que $N \subset Z$ et $(\mu\otimes\nu)(Z) = 0$. D'après le théorème 4.1.5, on a :

$$(\mu\otimes\nu)(Z) = \int_X \nu(Z_x)\, d\mu(x) = 0 \, ,$$

où la fonction $x \longmapsto \nu(Z_x)$ est μ-mesurable positive. On en déduit que $\nu(Z_x) = 0$ pour μ-presque tout $x \in X$ et, comme $N_x \subset Z_x \in \mathcal{N}$, N_x est ν-négligeable pour μ-presque tout $x \in X$. De même, on montre que N_y est μ-négligeable pour ν-presque tout $y \in Y$. ■

Nous pouvons maintenant démontrer les analogues des théorèmes 4.1.8 et 4.1.5 (ii) pour les fonctions $\mu\otimes\nu$-mesurables.

4.2.3 - Théorème. Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ et $(Y,\mathcal{N},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X\times Y \longrightarrow [0,+\infty]$ une fonction $\mu\otimes\nu$-mesurable. Alors, on a :

(i) L'application f_x est ν-mesurable pour μ-presque tout $x\in X$, et l'application $x \longmapsto \int_Y f_x\, d\nu$, définie μ-presque partout, est μ-mesurable;

(ii) L'application f_y est μ-mesurable pour ν-presque tout $y\in Y$, et l'application $y \longmapsto \int_X f_y\, d\mu$, définie ν-presque partout, est ν-mesurable;

(iii)
$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X d\mu(x) \int_Y f_x\, d\nu = \int_Y d\nu(y) \int_X f_y\, d\mu .$$

On note parfois $\iint_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu)$ ou $\iint_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ l'intégrale $\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu)$, et on parle de « l'intégrale double » de f sur $X\times Y$.

Démonstration (i) D'après la proposition 4.2.1, il existe un ensemble $N\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ tel que $(\mu\otimes\nu)(N)=0$ et tel que $g = f\,\mathbb{1}_{N^c}$ soit $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-mesurable. D'après la proposition 4.2.2, il existe un sous-ensemble $A\subset X$, A μ-négligeable, tel que N_x soit ν-négligeable pour tout $x\notin A$. Fixons $x\notin A$. Alors $f_x = g_x$ hors de N_x qui est ν-négligeable et, comme g_x est $\mathcal{N}$-mesurable, f_x est ν-mesurable et vérifie :
$$\int_Y f_x\, d\nu = \int_Y g_x\, d\nu .$$
D'après le théorème 4.1.8, la fonction $x \longmapsto \int_Y g_x\, d\nu$ est $\mathcal{M}$-mesurable ; comme elle est égale μ-presque partout à la fonction (définie μ-presque partout) $x \longmapsto \int_Y f_x\, d\nu$, cette dernière est μ-mesurable et on a :
$$\int_X d\mu(x) \int_Y f_x\, d\nu = \int_X d\mu(x) \int_Y g_x\, d\nu = \int_{X\times Y} g\, d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu).$$

(ii) Se démontre de la même manière que (i). On a :

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_Y d\nu(y)\int_X f_y\,d\mu.$$

(iii) Résulte immédiatement de (i) et (ii). ∎

4.2.4- Théorème (Fubini). Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ et $(Y,\mathcal{N},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mu\otimes\nu$-intégrable. Alors, on a :

(i) Pour μ-presque tout $x\in X$, la fonction $f_x : y \longmapsto f(x,y)$ est ν-intégrable, et la fonction (définie μ-presque partout) $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ est μ-intégrable ;

(ii) Pour ν-presque tout $y\in Y$, la fonction $f_y : x\longmapsto f(x,y)$ est μ-intégrable, et la fonction (définie ν-presque partout) $y\longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ est ν-intégrable ;

(iii) L'intégrale $\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \iint_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$ de f sur $X\times Y$ par rapport à la mesure $\mu\otimes\nu$ est donnée par :

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$$
$$= \int_Y d\nu(y)\int_X f(x,y)\,d\mu(x).$$

Démonstration. Quitte à considérer f^+ et f^-, on peut supposer, sans perte de généralité, que f est positive. D'après le théorème 4.2.3, la fonction f_x est ν-mesurable pour μ-presque tout x, et la fonction $x\longmapsto\int_Y f_x\,d\nu$ est μ-mesurable. En outre, on a :

$$\int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \iint_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) < +\infty.$$

Il s'ensuit que $\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) < +\infty$ pour μ-presque tout x, i.e. f_x est ν-intégrable pour μ-presque tout x. Par ailleurs, $x\longmapsto\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ est μ-intégrable, et on a

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)\,d\nu(y).$$

En échangeant les rôles de X et de Y, on obtient (ii) et la totalité de (iii). ■

4.2.5- Théorème (Fatou). Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction $\mu\otimes\nu$-mesurable. On suppose que la fonction $y \mapsto |f(x,y)|$ est ν-intégrable pour μ-presque tout x, et que la fonction $x \mapsto \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y)$ est μ-intégrable. Alors, f est $\mu\otimes\nu$-intégrable, et les conclusions du théorème de Fubini sont vérifiées.

Démonstration. Comme la fonction $|f|$ est $\mu\otimes\nu$-mesurable, on a en vertu du théorème 4.2.3 :

$$\iint_{X\times Y} |f|\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X d\mu(x) \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y),$$

et les hypothèses entraînent que $\iint_{X\times Y} |f|\, d(\mu\otimes\nu) < +\infty$.

La fonction $|f|$ est donc $\mu\otimes\nu$-intégrable, ce qui implique que f est $\mu\otimes\nu$-intégrable. ■

4.2.6. Corollaire - Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions respectivement μ-intégrable et ν-intégrable. Alors, la fonction

$$f\otimes g : (x,y) \in X\times Y \longrightarrow f(x)g(y) \in \mathbb{R}$$

est $\mu\otimes\nu$-intégrable et on a :

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \left(\int_X f(x)\, d\mu(x)\right)\left(\int_Y g(y)\, d\nu(y)\right).$$

Démonstration. La fonction $(x,y) \mapsto f(x)$ est $\mu\otimes\nu$-mesurable car, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des $(x,y) \in X\times Y$ tels que $f(x) \leq \lambda$ est de la forme $(A \cup N)\times Y$ où $A \in \mathcal{M}$ et N est μ-négligeable. Or

$$(A\cup N)\times Y = (A\times Y) \cup (N\times Y) \qquad \text{où } A\times Y \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N},$$

et où $N\times Y$ est $\mu\otimes\nu$-négligeable, de sorte que $(A\cup N)\times Y$ est $\mu\otimes\nu$-mesurable. La fonction $(x,y) \mapsto f(x)$ est donc bien $\mu\otimes\nu$-mesurable. De même, la fonction

$(x,y) \longmapsto g(y)$ est $\mu\otimes\nu$-mesurable, et donc la fonction produit $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$ est $\mu\otimes\nu$-mesurable. D'après le théorème de Fatou, $f\otimes g$ est $\mu\otimes\nu$-intégrable, et le théorème de Fubini fournit l'égalité

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \left(\int_X f\,d\mu\right)\left(\int_Y g\,d\nu\right). \blacksquare$$

4.2.7. Corollaire. Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ et $(Y,\mathcal{N},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit N une partie $\mu\otimes\nu$-mesurable de $X\times Y$. Si, pour μ-presque tout $x\in X$, la coupe N_x est ν-négligeable, alors N est $\mu\otimes\nu$-négligeable.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème de Fubini. $\blacksquare$

4.2.8. Remarque. Il existe des fonctions $\mu\otimes\nu$-mesurables $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ pour lesquelles les intégrales superposées $\int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $\int_Y d\nu(y)\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ ont un sens, mais qui ne sont pas $\mu\otimes\nu$-intégrables. Considérons par exemple, sur le produit $[0,1]\times[0,1]$ muni de la mesure produit des mesures de Lebesgue sur $[0,1]$, la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0), \text{ et}$$

$$f(0,0) = 0.$$

Cette fonction est mesurable, car elle est continue sauf au point $(0,0)$ qui est un ensemble négligeable. Pour $x\neq 0$, la fonction f_x est continue donc intégrable sur $[0,1]$, de primitive $y \longmapsto \frac{y}{x^2+y^2}$, de sorte que $\int_0^1 f_x\,dy = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x\neq 0$. Cette dernière fonction, définie pour $x\neq 0$, est intégrable, et on a :

$$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{\pi}{4}.$$

On vérifie de même que $\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$.

Le théorème de Fubini implique alors que f n'est pas intégrable pour la mesure produit des mesures de Lebesgue sur $[0,1]\times[0,1]$.

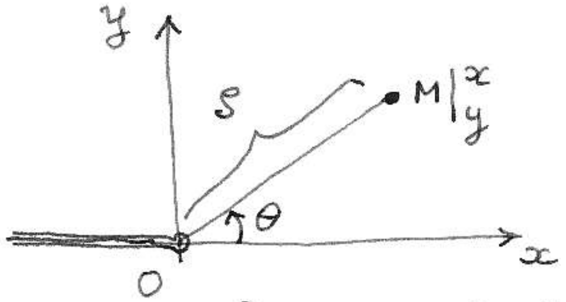
4.3 - THÉORÈME DU CHANGEMENT DE VARIABLE

4.3.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont le point courant est noté y. Faire un changement de variable consiste à écrire $y = \phi(x)$, où $\phi : \Omega \to U$ est un difféomorphisme de classe C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert U. Cela signifie que ϕ est un homéomorphisme de Ω sur U qui est de classe C^1 ainsi que $\phi^{-1} : U \to \Omega$.
On note $D\phi(x)$ la différentielle de ϕ au point x ; c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est inversible, d'inverse $D(\phi^{-1})(\phi(x))$ en vertu de la règle de différentiation des fonctions composées. On notera $J_\phi(x) = \det(D\phi(x))$ le Jacobien de ϕ au point x.

Par exemple, le passage en coordonnées polaires consiste, pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 -]-\infty,0]$ à poser :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

où $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ et où θ est l'angle $(-\pi < \theta < \pi)$ que fait le vecteur de coordonnées (x,y) avec l'axe des x (cf. figure ci-contre)



Ici, $U = \mathbb{R}^2 -]-\infty, 0]$, $\Omega =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ et le changement de variable est le difféomorphisme $\phi : \Omega \to U$ défini par :

$$\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

On a :

a) La différentielle $D\phi(\rho,\theta)$ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho}(\rho,\theta), & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \rho}(\rho,\theta), & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

où $\phi_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$, $\phi_2(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$;

b) Le Jacobien de ϕ au point (ρ,θ) est ici :

$$J_\phi(\rho,\theta) = \rho$$

Le but de cette section est d'exprimer l'intégrale $\int_U f(y)dy$ de toute fonction f intégrable sur U pour la mesure de Lebesgue dy, dans la nouvelle variable x qui est définie par le changement de variable $y = \phi(x)$.
A cet effet, on utilise le résultat suivant :

4.3.2- Théorème. Soient U, Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : \Omega \to U$ un C^1-difféomorphisme de Ω sur U. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique sur U. Alors, f est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur U si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur Ω, et on a :

$$\int_U f(y)dy = \int_\Omega f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx .$$

Ainsi, dans le cas du passage en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si elle est intégrable sur $\mathbb{R}^2 -]-\infty,0]$ (car $]-\infty,0]$ est de mesure nulle), et donc, d'après le théorème ci-dessus, si et seulement si la fonction $(\rho,\theta) \longmapsto f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$, et on a alors :