$m_i = \operatorname{Inf}\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$
$M_i = \operatorname{Sup}\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$

sont des fonctions simples Lebesgue-intégrables qui vérifient

$$\int_{[a,b]} \varphi_\sigma \, d\lambda = s(\sigma) \; ; \; \int_{[a,b]} \psi_\sigma \, d\lambda = S(\sigma).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, notons σ_n la subdivision de $[a,b]$ en 2^n segments de longueur égale à $\frac{b-a}{2^n}$. Pour simplifier, notons $\varphi_n = \varphi_{\sigma_n}$, $\psi_n = \psi_{\sigma_n}$. Comme les subdivisions σ_n sont emboitées, on a :

$$\varphi_n \leq \varphi_{n+1}, \quad \psi_{n+1} \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \varphi_n \leq f \leq \psi_n.$$

Comme f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, on a :

$$s(\sigma_n), \; S(\sigma_n) \longrightarrow I = \int_a^b f(x)dx$$

quand $n \to +\infty$, et par conséquent :

$$\int_{[a,b]} \varphi_n \, d\lambda = s(\sigma_n) \leq I, \qquad I \leq S(\sigma_n) = \int_{[a,b]} \psi_n \, d\lambda.$$

Posons $\varphi = \operatorname{Sup}_n \varphi_n$, $\psi = \operatorname{Inf}_n \psi_n$. On a :

$$\varphi \leq f \leq \psi$$

et, en vertu du théorème de Beppo-Levi,

$$\int_{[a,b]} \varphi \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} s(\sigma_n) = I$$
$$= \lim_{n \to \infty} S(\sigma_n) = \lim_{n \to \infty} \int_{[a,b]} \psi_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} \psi \, d\lambda.$$

On en déduit que $\int_{[a,b]} (\psi - \varphi) d\lambda = 0$, d'où $\varphi = \psi$ presque partout, et donc $f = \varphi = \psi$ presque partout. Il s'ensuit que f est Lebesgue-intégrable (comme φ et ψ) et que

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} \varphi\,d\lambda = I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

ce qui démontre le théorème 3.5.3. ■

3.5.4. Intégrales généralisées. Soit $I = (\alpha, \beta)$ un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ (soit I n'est pas borné, soit I est borné et non fermé). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et supposons que la restriction de f à tout intervalle compact $[a,b]$ de I soit Riemann-intégrable. Lorsque la limite

$$\lim_{a \searrow \alpha,\, b \nearrow \beta} \int_a^b f(x)\,dx$$

existe, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ est convergente et on pose :

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{a \searrow \alpha,\, b \nearrow \beta} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ est divergente.

Si $\int_I |f(x)|\,dx$ est convergente, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ est absolument convergente. Dans ce cas, le critère de Cauchy pour les intégrales montre que $\int_I f(x)\,dx$ est convergente. On prendra garde au fait que l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ peut être convergente sans être absolument convergente. Par exemple, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente (et de valeur $\frac{\pi}{2}$) mais pas absolument convergente.

Le théorème suivant fait le lien entre convergence absolue de l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ et Lebesgue-intégrabilité de f sur I :

3.5.5 - Théorème. Soit I un intervalle non compact de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dont la restriction à tout intervalle compact $[a,b] \subset I$ est Riemann-intégrable, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est Lebesgue-intégrable sur I ;

(ii) L'intégrale $\int_I |f(x)|dx$ est convergente.

Lorsque l'une de ces conditions est réalisée, on a :

$$\int_I f(x)dx = \int_I f d\lambda .$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Si f est Lebesgue-intégrable sur I, alors $|f|$ est aussi Lebesgue-intégrable sur I et on a, pour tout intervalle compact $[a,b]$ inclus dans I :

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_{[a,b]} |f| d\lambda \leqq \int_I |f| d\lambda < +\infty ,$$

d'où il résulte que $\int_I |f(x)|dx < +\infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Posons $I = (\alpha, \beta)$ et choisissons des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ de points de I tels que :

$$a_n \leqq b_n \ ; \ a_n \searrow \alpha \ \text{ et } \ b_n \nearrow \beta .$$

Posons $f_n = f \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}$. Comme f est Riemann-intégrable sur $[a_n, b_n]$, elle est Lebesgue-intégrable sur $[a_n, b_n]$ et f_n est Lebesgue-intégrable sur I. Les fonctions $|f_n|$ forment une suite croissante de fonctions Lebesgue-intégrables sur I qui converge simplement vers $|f|$. En outre,

$$\int_I |f_n| d\lambda = \int_{[a_n, b_n]} |f| d\lambda = \int_{a_n}^{b_n} |f(x)| dx \leqq \int_I |f(x)|dx < +\infty ,$$

et le théorème de convergence monotone prouve que $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur I. Comme on a :

$$|f_n| \leqq |f| ,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que f est lebesgue-intégrable sur I et que

$$\int_I f d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

■

<u>3.5.6. Exemple</u>. La fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ (où $a>0$) si et seulement si $\alpha > 1$.

En effet, la relation

$$\int_a^n \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log n - \log a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

montre que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Il s'ensuit que $\frac{1}{x^\alpha}$ est lebesgue intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas, on a :

$$\int_{[a,+\infty[} \frac{1}{x^\alpha} d\lambda(x) = \frac{1}{(\alpha-1)\, a^{\alpha-1}}.$$

On démontrerai de même que $\frac{1}{x^\alpha}$ est lebesgue-intégrable sur $[0,a]$ (avec $a>0$) si et seulement si $\alpha < 1$.

<u>3.6. FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES</u>

<u>3.6.1</u>. Soient (X,μ) un espace mesuré et Ω un espace métrique. On suppose donnée une fonction numérique

$$f : X \times \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

et on désigne par f_λ et f_x les applications partielles $x \longmapsto f_\lambda(x) = f(x,\lambda)$ et $\lambda \longmapsto f_x(\lambda) = f(x,\lambda)$.

Nous supposerons dans tout ce paragraphe que, pour tout $\lambda \in \Omega$, la fonction f_λ est μ-intégrable.

On définit alors une fonction $F : \Omega \to \mathbb{R}$ en posant :

$$F(\lambda) = \int_X f_\lambda(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x,\lambda)\, d\mu(x).$$

On dit que F est une fonction définie par une intégrale. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la continuité de F et (lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) à sa différentiabilité.

3.6.2 - Théorème. Soient (X,μ) un espace mesuré, Ω un espace métrique et $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction numérique telle que f_λ soit μ-intégrable pour tout $\lambda \in \Omega$. Supposons que les conditions suivantes soient réalisées :

(i) Pour μ-presque tout $x \in X$, la fonction f_x est continue de la variable λ au point $\lambda_0 \in \Omega$;

(ii) Il existe un voisinage V de λ_0 dans Ω et une fonction μ-intégrable fixe g telle que :

$$|f(x,\lambda)| \leq g(x) \quad \text{pour tout } \lambda \in V.$$

Alors, $F(\lambda) = \int_X f(x,\lambda)\, d\mu(x)$ est une fonction continue au point $\lambda = \lambda_0$.

Démonstration. Comme Ω est un espace métrique, il suffit de montrer que $F(\lambda_n) \to F(\lambda_0)$ pour toute suite $(\lambda_n)_n$ qui converge vers λ_0. Posons

$$f_n(x) = f(x, \lambda_n).$$

Pour μ-presque tout x, la fonction f_x est continue au point λ_0 et donc $f_n(x) = f(x,\lambda_n) = f_x(\lambda_n) \to f_x(\lambda_0) = f(x,\lambda_0)$ quand $n \to +\infty$. Par ailleurs, pour n assez grand, on a $\lambda_n \in V$ et donc :

$$|f_n(x)| = |f(x,\lambda_n)| \leq g(x).$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$F(\lambda_n) = \int_X f_n(x)\, d\mu(x) \longrightarrow \int_X f(x,\lambda_0)\, d\mu(x) = F(\lambda_0)$$

quand $n \to +\infty$, d'où le théorème. ∎

3.6.3. Théorème (dérivation sous le signe d'intégration).
Soient (X,μ) un espace mesuré et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont on note $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ le point courant. Soit $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction numérique telle que f_λ soit μ-intégrable pour tout $\lambda \in \Omega$. On suppose que les conditions suivantes sont réalisées :

(i) Pour μ-presque tout $x \in X$, f_x possède une dérivée partielle par rapport à λ_j et $\lambda \mapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda)$ est continue sur Ω ;

(ii) Il existe une fonction g_j μ-intégrable telle que l'on ait :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda)\right| \leqq g_j(x) \text{ pour tout } \lambda \in \Omega.$$

Alors, la fonction $F(\lambda) = \int_X f(x,\lambda)\,d\mu(x)$ possède une dérivée partielle par rapport à λ_j et l'application $\lambda \mapsto \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(\lambda)$ est continue sur Ω.
En particulier, si les conditions (i) et (ii) sont réalisées pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, la fonction F est différentiable sur Ω.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\frac{F(\lambda_1, \dots, \lambda_j + \varepsilon, \dots, \lambda_n) - F(\lambda)}{\varepsilon} = \int_X \frac{f(x;\lambda_1, \dots, \lambda_j + \varepsilon, \dots, \lambda_n) - f(x,\lambda)}{\varepsilon}\, d\mu(x)$$

D'après le théorème des accroissements finis (applicable pour μ-presque tout $x \in X$), il existe un réel θ_ε, $|\theta_\varepsilon| < \varepsilon$, tel que :

$$\frac{f(x;\lambda_1, \dots, \lambda_j + \varepsilon, \dots, \lambda_n) - f(x,\lambda)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x;\lambda_1, \dots, \lambda_j + \theta_\varepsilon, \dots, \lambda_n)$$

Si ε parcourt une suite $\varepsilon_p \to 0$, la fonction

$$h_p(x) = \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x;\lambda_1, \dots, \lambda_j + \theta_{\varepsilon_p}, \dots, \lambda_n)$$

converge μ-presque partout vers $h(x) = \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda)$ car l'application $\lambda \mapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda)$ est continue pour μ-presque tout

$x \in X$. Par ailleurs, on a :

$$|h_p(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x; \lambda_1, \dots, \lambda_j + \theta_{\varepsilon_p}, \dots, \lambda_n)\right| \leq g_j(x)$$

pour μ-presque tout $x \in X$, où g_j est une fonction μ-intégrable fixe. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x, \lambda)$ (qui est définie pour μ-presque tout x) est μ-intégrable et on a :

$$\frac{F(\lambda_1, \dots, \lambda_j + \varepsilon_p, \dots, \lambda_n) - F(\lambda)}{\varepsilon_p} = \int_X h_p \, d\mu \xrightarrow[p \to \infty]{} \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x, \lambda) \, d\mu(x),$$

ce qui prouve que F possède une dérivée partielle par rapport à λ_j en tout point $\lambda \in \Omega$ et que l'on a :

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(\lambda) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x, \lambda) \, d\mu(x).$$

La continuité de l'application $\lambda \longmapsto \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(\lambda)$ sur Ω résulte alors du théorème 3.6.2. ∎

3.6.4. APPLICATION AU CALCUL DE $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

D'après le théorème 3.5.5, la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$. Posons

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

et proposons-nous de calculer la valeur de I. A cet effet, considérons la fonction définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

Comme on a $\left|\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ et que la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$, la fonction $f(x)$ est bien définie, et elle est continue en vertu du théorème 3.6.2. Notons que l'on a : $f(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

En outre, puisque $\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \longrightarrow 0$ quand $x \to +\infty$ pour tout $t>0$, il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Pour $x>0$,

on a : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right) = \dfrac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$. En outre, pour

$x \geqq a > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right)\right| = \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} \leqq e^{-at^2}$$

et, comme la fonction $t \longmapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, il résulte du théorème de dérivation sous le signe d'intégration que f est dérivable sur tout intervalle $]a,+\infty[$ avec $a>0$, donc est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée :

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt.$$

On a donc :

$$f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \text{ pour } x>0.$$

Posons $u = \sqrt{x}t$ dans la dernière intégrale ; on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle

$$f - f' = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

On a donc

$$f(x) = C(x)e^x, \text{ où la fonction } C$$

vérifie : $-C'(x)e^x = \dfrac{I}{\sqrt{x}}$, et donc $C'(x) = -I\,\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

On en déduit que $C(x) = -I\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = -I\int \frac{e^{-v^2}}{v} 2v\,dv$ $(v^2 = x)$, soit $$C(x) = C - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt,$$ où C est une constante réelle.

Il s'ensuit que :

$$f(x) = \left(C - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt\right)e^{x} \quad \text{pour } x > 0,$$

et cette formule reste vraie par continuité pour $x = 0$. Puisque $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on a $C = \frac{\pi}{2}$ et donc, au total :

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt\right)e^{x}.$$

Puisque $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, on a nécessairement

$$\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = 0,$$

soit $\frac{\pi}{2} - 2I^2 = 0$, d'où l'on tire :

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

On peut retrouver rapidement ce résultat en remarquant que :

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

où D est le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}.$$

En utilisant les coordonnées polaires, on obtient :

$$I^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{2}du$$
$$= \frac{\pi}{4},$$

d'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Les règles de calcul des intégrales doubles utilisées ici ne ~~seront~~ cependant pleinement justifiées qu'au chapitre suivant.