$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2 -]-\infty,0]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta.$$

On dit parfois que « l'élément d'aire de $\mathbb{R}^2$ est $dx\,dy$ en coordonnées cartésiennes, et $\rho\, d\rho\, d\theta$ en coordonnées polaires ».

La démonstration du théorème 4.3.2 utilise le lemme suivant :

4.3.3- Lemme - Pour tout Borélien B de $\mathbb{R}^n$ et tout isomorphisme linéaire T de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\lambda_n(T(B)) = |\det(T)|\,\lambda_n(B),$$

où λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Montrons tout d'abord la formule indiquée lorsque B est un pavé P de $\mathbb{R}^n$. Comme $\lambda_n(a+P) = \lambda_n(P)$ et $\lambda_n(T(a+P)) = \lambda_n(T(a)+T(P)) = \lambda_n(T(P))$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on peut supposer sans perte de généralité que

$$P = \prod_{i=1}^{n} [0, a_i].$$

Comme $T(P)$ est le pavé n-dimensionnel engendré par les vecteurs $T(a_i e_i)$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_n(T(P)) &= |\det(T(a_1e_1), \dots, T(a_ne_n))| \\
&= |\det(T)|\,|\det(a_1e_1, \dots, a_ne_n)| \\
&= |\det(T)|\,|a_1 \cdots a_n| \\
&= |\det(T)|\,\lambda_n(P),
\end{aligned}$$

et la formule désirée est démontrée pour tout pavé P de $\mathbb{R}^n$. Soit maintenant B un Borélien de $\mathbb{R}^n$, et recouvrons-le par une réunion dénombrable de pavés P_k :

$$B \subset \bigcup_{k\geq 1} P_k.$$

On a : $\quad T(B) \subset \bigcup_{k \geq 1} T(P_k)$, d'où :

$$\lambda_n(T(B)) \leq \sum_{k\geq 1} \lambda_n(T(P_k)) = |\det(T)| \sum_{k\geq 1}\lambda_n(P_k).$$

Or $\lambda_n(B) = \inf\left\{ \sum_{k\geq 1} \lambda_n(P_k) \;\middle|\; B \subset \bigcup_{k\geq 1} P_k \;;\; P_k = \text{pavé de } \mathbb{R}^n \right\}$, de sorte que l'on déduit de ce qui précède :

$$\lambda_n(T(B)) \leqq |\det(T)|\, \lambda_n(B).$$

En remplaçant dans cette formule B par $T(B)$ et T par T^{-1}, on obtient :

$$\lambda_n(B) = \lambda_n(T^{-1}(T(B))) \leqq |\det(T)^{-1}|\, \lambda_n(T(B)),$$

d'où $\quad |\det(T)|\, \lambda_n(B) \leqq \lambda_n(T(B))$ et donc :

$$\lambda_n(T(B)) = |\det(T)|\, \lambda_n(B). \blacksquare$$

4.3.4- Démonstration du théorème 4.3.2.

Soit $\phi : \Omega \to U$ un C^1-difféomorphisme de Ω sur U.

1ère étape. Montrons que, pour tout pavé P borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{P} \subset \Omega$, on a :

$$\lambda_n(\phi(P)) \leqq \int_P |J_\phi(x)|\, dx.$$

A cet effet, on peut supposer que $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. En effet, si $P = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)$ est un pavé borné tel que $\overline{P} = \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i] \subset \Omega$, il existe pour tout i une suite croissante $(a_{m,i})_m$ de rationnels convergeant vers α_i et une suite décroissante de rationnels $(b_{m,i})_m$ convergeant vers β_i telles que

$$P_m = \prod_{i=1}^{n} [a_{m,i}, b_{m,i}] \subset \Omega.$$

Si $\lambda_n(\phi(P_m)) \leqq \int_{P_m} |J_\phi(x)|\, dx$, on en déduit que :

$$\lambda_n(\phi(P)) \leqq \lambda_n(\phi(P_m)) \leqq \int_{P_m} |J_\phi(x)|\, dx.$$

Comme $\overline{P} = \bigcap_m P_m$, on en déduit que

$$\lambda_n(\phi(P)) \leqq \lim_{m \to \infty} \int_{P_m} |J_\phi(x)|\, dx = \int_{\overline{P}} |J_\phi(x)|\, dx,$$

et donc

$$\lambda_n(\phi(P)) \leqq \int_P |J_\phi(x)|\, dx,$$ puisque $\overline{P} \setminus P$ est négligeable. On peut donc supposer que $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, il existe un entier $q \geqq 1$ et des entiers $p_i \geqq 1$ tels que

$b_i - a_i = \frac{p_i}{q}$, de sorte que l'on peut diviser P en une réunion disjointe de $N = p_1 p_2 \cdots p_n$ petits pavés cubiques de côtés $\frac{1}{q}$. En divisant ces petits pavés cubiques en une réunion disjointe de pavés cubiques de côtés $\frac{1}{2^m q}$, on peut décomposer P en somme finie disjointe de petits pavés cubiques ayant tous une arête de même longueur s aussi petite que désiré.

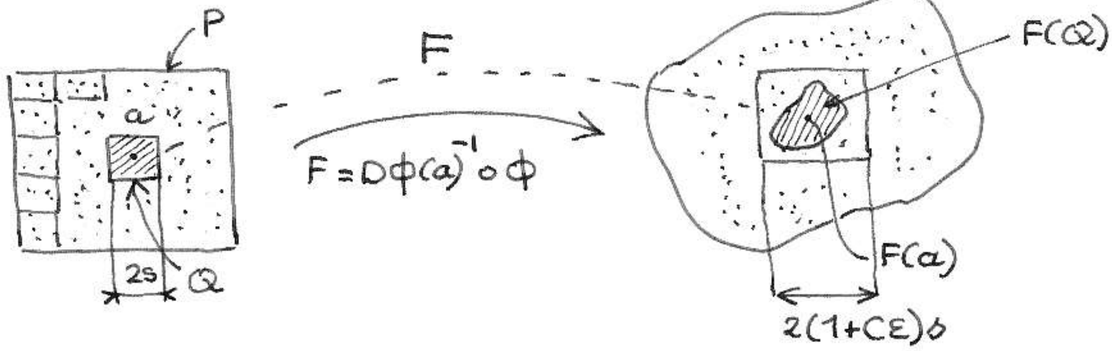
Fixons $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Comme l'application $x \longmapsto \| D\phi(x)^{-1} \|$ est continue sur P qui est compact, elle est bornée. Posons (*)

$$C = \sup_{x \in P} \| D\phi(x)^{-1} \|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme les fonctions $x \longmapsto D\phi(x)$ et $x \longmapsto J_\phi(x) = \det(D\phi(x))$ sont continues sur P qui est compact, elles sont uniformément continues et il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait :

$$x, y \in P \text{ et } \|x - y\| \leq \delta \implies \begin{cases} \|D\phi(x) - D\phi(y)\| \leq \varepsilon \\ \quad\text{et} \\ |J_\phi(x) - J_\phi(y)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Décomposons P en une réunion disjointe de petits pavés cubiques Q ayant tous une arête de même longueur $2s$ avec $s \leq \delta$. Considérons l'un de ces pavés cubiques Q, et notons a son centre.



Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par :

$$F(x) = D\phi(a)^{-1}(\phi(x))$$

et montrons que $F(Q)$ est contenu dans un cube de centre

(*) On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

$F(a)$ et d'arête $2(1+C\varepsilon)s$. A cet effet, notons que F est de classe C^1, de différentielle :

$$DF(x) = D\Phi(a)^{-1} D\Phi(x)$$
$$= D\Phi(a)^{-1}\left[D\Phi(x) - D\Phi(a)\right] + I .$$

Pour $x \in Q$, on a $\|x-a\| \leqq s \leqq \delta$, d'où $\|D\Phi(x) - D\Phi(a)\| \leqq \varepsilon$, et donc :

$$\|DF(x)\| \leqq \|D\Phi(a)^{-1}\| \, \|D\Phi(x) - D\Phi(a)\| + 1$$
$$\leqq C\varepsilon + 1 .$$

D'après le théorème des accroissements finis, appliqué à F sur le cube Q qui est convexe, on a :

$$\|F(x) - F(a)\| \leqq \|x-a\| \, (C\varepsilon+1) \leqq s(C\varepsilon+1)$$

quel que soit $x \in Q$. Il s'ensuit que $F(Q)$ est contenu dans le cube de centre $F(a)$ et d'arête $2s(C\varepsilon+1)$, d'où :

$$\lambda_n(F(Q)) \leqq (C\varepsilon+1)^n (2s)^n = (C\varepsilon+1)^n \lambda_n(Q)$$

Comme $F(Q)$ est l'image de $\Phi(Q)$ par l'application linéaire inversible $D\Phi(a)^{-1}$, il résulte du lemme 4.3.3 que

$$\lambda_n(F(Q)) = |\det(D\Phi(a))^{-1}| \, \lambda_n(\Phi(Q)),$$

et donc

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \leqq (C\varepsilon+1)^n \, |J_\Phi(a)| \, \lambda_n(Q)$$
$$= (C\varepsilon+1)^n \int_Q |J_\Phi(a)| \, dx .$$

Or, pour $x \in Q$, on a $|J_\Phi(x) - J_\Phi(a)| \leqq \varepsilon$, de sorte que

$$|J_\Phi(a)| \leqq |J_\Phi(x)| + \varepsilon \quad \text{et donc}$$

$$\int_Q |J_\Phi(a)| \, dx \leqq \int_Q |J_\Phi(x)| \, dx + \varepsilon \lambda_n(Q).$$

Il s'ensuit que :

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \leqq (C\varepsilon+1)^n \left[\int_Q |J_\Phi(x)| \, dx + \varepsilon \lambda_n(Q)\right],$$

d'où l'on déduit, par sommation sur les petits cubes Q :

$$\lambda_n(\Phi(P)) \leqq (C\varepsilon+1)^n \left[\int_P |J_\Phi(x)|\,dx + \varepsilon \lambda_n(P) \right].$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient finalement :

$$\lambda_n(\Phi(P)) \leqq \int |J_\Phi(x)|\,dx,$$

ce qui achève la première étape.

<u>2ème étape</u>. <u>Montrons que l'on a, pour tout Borélien B de U :</u> $\lambda_n(B) \leqq \int_{\Phi^{-1}(B)} |J_\Phi(x)|\,dx$.

Soit A un Borélien de Ω. Pour toute suite $(P_1, P_2, \dots)$ de pavés de Ω telle que

$$A \subset \bigcup_{m \geqq 1} P_m,$$

on a en vertu de la 1ère étape :

$$(1) \qquad \lambda_n(\Phi(A)) \leqq \sum_{m \geqq 1} \lambda_n(\Phi(P_m)) \leqq \sum_{m \geqq 1} \int_{P_m} |J_\Phi(x)|\,dx.$$

Or on a, pour la mesure positive Borélienne ν sur Ω définie par

$$\nu(A) = \int_A |J_\Phi(x)|\,dx :$$

$$\nu(A) = \mathrm{Inf}\left\{ \sum_{m \geqq 1} \nu(P_m) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{m \geqq 1} P_m \,;\, P_m = \text{pavé de } \Omega \right\}.$$

En faisant varier le recouvrement de A par les P_m dans (1), on obtient donc :

$$\lambda_n(\Phi(A)) \leqq \int_A |J_\Phi(x)|\,dx.$$

Si B est un Borélien de U, la relation ci-dessus appliquée au Borélien $A = \Phi^{-1}(B)$ de Ω nous donne :

$$\lambda_n(B) \leqq \int_{\Phi^{-1}(B)} |J_\Phi(x)|\,dx,$$

ce qui achève la seconde étape.

<u>3ème étape</u>. <u>Montrons que l'on a, pour toute fonction f Borélienne positive sur U :</u>

$$\int_U f(y)\,dy = \int_\Omega f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx.$$

Pour tout Borélien B de U, on a d'après l'étape 2 :

$$\int_U 1\!\!1_B(y)\,dy = \lambda_n(B) \leqq \int_{\phi^{-1}(B)} |J_\phi(x)|\,dx = \int_\Omega 1\!\!1_B(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx.$$

Il s'ensuit que, pour toute fonction Borélienne positive e simple, on a :

$$\int_U e(y)\,dy \leqq \int_\Omega e(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx$$

Si $f : U \to [0,+\infty]$ est Borélienne positive, il existe une suite croissante $(e_n)_n$ de fonctions Boréliennes positives simples telle que $f = \sup_n e_n$. De la relation

$$\int_U e_n(y)\,dy \leqq \int_\Omega e_n(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx \leqq \int_\Omega f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx,$$

on déduit alors :

$$\int_U f(y)\,dy = \sup_n \int_U e_n(y)\,dy \leqq \int_\Omega f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx.$$

Echangeons alors les rôles de U et Ω, et remplaçons ϕ par ϕ^{-1}. La relation ci-dessus, appliquée à la fonction Borélienne positive $g(x) = f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx$ donne alors :

$$\int_\Omega g(x)\,dx \leqq \int_U g(\phi^{-1}(y))\,|J_{\phi^{-1}}(y)|\,dy, \text{ soit :}$$

$$\int_\Omega f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx \leqq \int_U f(y)\,|\det D\phi(\phi^{-1}(y))|\,|\det(D\phi^{-1}(y))|\,dy$$

$$= \int_U f(y)\,dy$$

car $D\phi(\phi^{-1}(y))\,D\phi^{-1}(y) = D(\phi\circ\phi^{-1})(y) = I$. Il s'ensuit que

$$\int_U f(y)\,dy = \int_\Omega f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx,$$ ce qui achève la démonstration de la $3^{\text{ème}}$ étape.

Fin de la démonstration du théorème 4.3.2

De l'étape 3, il résulte immédiatement qu'un Borélien B est négligeable pour la mesure de Lebesgue si et seulement si $\phi^{-1}(B)$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Il s'ensuit immédiatement que $N \subset U$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue si et seulement si $\phi^{-1}(N) \subset \Omega$ est négligeable. Il s'ensuit alors qu'une fonction positive f sur U est Lebesgue-mesurable si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(\phi(x))|J_\phi(x)|$ est Lebesgue-mesurable, et on a alors :

$$\int_U f(y)\,dy = \int_\Omega f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx.$$

En utilisant la décomposition $f = f^+ - f^-$ d'une fonction quelconque et le fait qu'une fonction $f \geq 0$ est intégrable sur U ssi $\int_U f(y)\,dy < +\infty$, i.e. ssi $\int_\Omega f(\phi(x))|J_\phi(x)|\,dx < +\infty$, c'est à dire ssi la fonction $x \longmapsto f(\phi(x))|J_\phi(x)|$ est intégrable, on déduit aisément de (1) le théorème de changement de variable pour les fonctions intégrables. ■

4.3.5- Exemple. Cherchons à quelle condition sur α la fonction $f_\alpha(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est intégrable sur le disque $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < R^2\}$ $(R>0)$.

Par passage en coordonnées polaires, f_α est intégrable sur D_R si et seulement si la fonction

$$(\rho,\theta) \longmapsto \frac{1}{\rho^{2\alpha}}\,\rho = \rho^{1-2\alpha}$$

est intégrable sur $]0,R[\times]-\pi,\pi[$. Cette dernière fonction est intégrable sur $]0,R[\times]-\pi,\pi[$ si et seulement si la fonction $\rho \longmapsto \rho^{1-2\alpha}$ est intégrable sur $]0,R[$, c'est à dire si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\iint_{x^2+y^2<R^2} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = 2\pi \int_0^R \rho^{1-2\alpha}\,d\rho = \frac{2\pi}{2(1-\alpha)} \times \frac{1}{R^{2(\alpha-1)}} = \frac{\pi}{(1-\alpha)R^{2(\alpha-1)}}.$$

FIN DU COURS DE CALCUL INTÉGRAL