Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

FICHE N°4 (Complément):

Exercice 13. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et n un entier strictement positif. On pose

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) | \ A \text{ inversible}\}.$$

1. Montrer que, pour A, B deux élements de $GL_n(\mathbb{K})$, on a $AB \in GL_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour le produit de matrices.

Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est appelé le **groupe général linéaire de degré n du corps $\mathbb{K}$**.

Exercice 14. Posons $O_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) | {}^tAA = \mathbf{1}_n\}$.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.
2. Cas particulier: montrer que pour tout élement $A \in O_2(\mathbb{R})$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Le groupe $O_n(\mathbb{K})$ est appelé le **groupe orthogonal**.

Exercice 15. Soit n un entier tel que $n > 1$ et posons

$$A := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^n = \mathbf{1}_2$. En déduire que $G := \{A^i \ (0 \le i < n)\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ d'ordre n.
2. Soit φ l'application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans G définie par $\varphi(\bar{i}) := A^i$ pour $\bar{i} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que φ est bien définie et que φ est un morphisme.
   (b) Montrer que φ est un isomorphisme.
3. Posons $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $B^2 = \mathbf{1}_2$ et $BAB^{-1} = A^{-1}$.
   (b) En déduire que $H := \{A^i, A^iB \ (0 \le i < n)\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

   Le groupe H est appelé le **groupe diédral d'ordre $2n$** et noté D_n.

Exercice 16.

1. Soient S, T deux matrices définies par

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que $G = \{\mathbf{1}_3, S, T, ST, TS, STS\}$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{Q})$.

   (b) Décrire la table de multiplication de G.

2. Soit $\mathfrak{S}_3 := \{f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} | f \text{ bijective}\}$.

   (a) Soient $f, g \in \mathfrak{S}_3$ définis par $f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3$ et $g(1) = 1,\ g(2) = 3,\ g(3) = 2$. Montrer que $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{id}, f, g, f \circ g, g \circ f, f \circ g \circ f\}$.

   (b) Décrire la table de multiplication de $\mathfrak{S}_3$.

   (c) Montrer qu'il existe un et un seul isomorphisme φ de G dans $\mathfrak{S}_3$ tel que $\varphi(S) = f$ et $\varphi(T) = g$.

3. Posons $H = GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

   (a) En explicitant tous les éléments de G, calculer l'ordre de G

   (b) Posons $A := \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Montrer que $H = \{\mathbf{1}_2, A, B, AB, BA, ABA\}$.

   (c) Décrire la table de multiplication de H.

   (d) Montrer qu'il existe un et un seul isomorphisme ψ de H dans $\mathfrak{S}_3$ tel que $\psi(A) = f$ et $\psi(B) = g$.