Université Claude Bernard Lyon 1
Math II - Algèbre
AUTOMNE 2010

Contrôle final du 19 janvier 2011
Durée: 2 heures

Les documents les calculettes et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

EXERCICE 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$. On pose $A := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer $\det(A^2)$.
2. En déduire que n est un nombre pair.
   Dans la suite, on suppose que $n = \dim E = 2$.
3. Soit $v \in E$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $\mathcal{C} := \{v, f(v)\}$ est une base de E.
   Indication: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x := av + bf(v) = 0$. Calculer $f(x)$.
4. Donner la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
5. En déduire que pour toute $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -\mathbf{1}_2$, il existe une matrice inversible $P \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme
$X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par le polynôme $X^2 - 1$.

EXERCICE 3. Soit $E := \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u(P) = \text{le reste de la division euclidienne de } XP \text{ par } X^4 - 1.$$

1. Soit $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de E. Calculer $u(1), u(X), u(X^2)$ et $u(X^3)$.
   En déduire la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Trouver les polynômes unitaires P_0 et P_1 de degré 3 tels que $u(P_0) = P_0$ et $u(P_1) = -P_1$.
   (*Rappel: Un polynôme unitaire de degré* 3 *est un polynôme de la forme* $X^3 + aX^2 + bX + c$.)
3. Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E)$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par
   $Q_0 := X^2 - 1$ et $Q_1 := X^3 - X$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{P_0, P_1, Q_0, Q_1\}$ est une base de E.
5. Donner la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
6. Calculer Q^{-1} et la matrice B de u dans la base $\mathcal{C}$.