Université Claude Bernard Lyon 1

Licence “Mathématiques et informatique”

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 2010-2011

Planche 5

Exercice 1

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des groupes pour $+$.
2. Montrer que $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe.
3. $(\{2k, k \in \mathbb{Z}\}, +)$ et $(\{2k+1, k \in \mathbb{Z}\}, +)$ sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?
4. $\mathbb{Q}_{>0}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$?

Exercice 2 Soit $E = \{1, \ldots, n\}$ et S_n l'ensemble des bijections de E dans E.

1. Si on note $\circ$ l'opération de composition, vérifier que $(S_n, \circ)$ est un groupe. Quel est l'ordre de S_n?

   Les éléments de S_n sont appelés des permutations. On note

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   la permutation de S_3 qui envoie 1 sur 2, 2 sur 1, et 3 sur 3, et de façon générale

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

2. Soient p et p' les deux permutations de S_5 définies par :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ p' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   Calculer $p \circ p'$, $p' \circ p$, et l'inverse de p.

3. On considère les trois permutations de S_4 suivantes:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \tau' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \tau'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   Calculer $\pi = \tau \circ \tau' \circ \tau''$

4. Calculer π^4. En déduire que $\pi^{-1} = \pi^3$.

5. La partie $\{id, \pi, \pi^2, \pi^3\}$ est-elle un sous-groupe de S_4?

Exercice 3 *(Signature d'une permutation) Soit ε l'application de S_n dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

1. Déterminer l'image de ε (on pourra montrer que $(\varepsilon(\sigma))^2 = 1$).

2. Montrer que ε est un morphisme de S_n vers un groupe que l'on précisera.

Exercice 4 1. Déterminer par leur table tous les groupes à 2, à 3 et à 4 éléments.

2. Ecrire la table d'addition des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n = 2, 3, 4$ et la table d'addition du groupe produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Que peut-on en conclure?

3. Ecrire la table de la loi $\circ$ des isométries d'un triangle équilateral.

4. Ecrire la table de composition $\circ$ du groupe des permutations S_3.

5. Soit

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   L'application $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to S_3$ définie par

$$f(\overline{0}) = id,\ f(\overline{1}) = \pi,\ f(\overline{2}) = \pi^2$$

   est-elle un morphisme de groupes?

Exercice 5 Soient $(G, \star)$ et $(G', \star')$ deux groupes et soit f un morphisme de groupes de $(G, \star)$ dans $(G', \star')$.

1. Si e est l'élément neutre de G et e' est l'élément neutre de G', montrer que $f(e) = e'$.

2. Montrer que pour tout x de G, $f(x)^{-1} = f\left(x^{-1}\right)$.

3. Montrer que l'image $f(K)$ de tout sous-groupe $K < G$ est un sous-groupe de G'. Que peut-on dire de l'image réciproque $f^{-1}(K') \subset G$ d'un sous-groupe $K' < G'$?

4. On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$ l'ensemble $\{g \in G,\ f(g) = e'\}$. Montrer que $(\ker(f), \star)$ est un sous- groupe distingué de G.

5. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$.

6. Déterminer le noyau du morphisme
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : l \mapsto \bar{l}?$$

7. Déterminer le noyau du morphisme de signature
$$\epsilon : S_3 \to \mathbb{R} : \sigma \mapsto \epsilon(\sigma)$$
de l'exercice 3.

Exercice 6 Si H et K sont deux sous-groupes d'un même groupe G, montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Exercice 7 Montrer que si G est un groupe, la partie
$$Z_G := \{g \in G,\ gh = hg\ \forall h \in G\}$$
est un sous-groupe de G. Est-il distingué? Ce sous-groupe est appelé le *centre* du groupe G.

Rappel 1 Si G est un groupe fini et H est un sous-groupe de G, alors l' ordre de H divise celui de G. En particulier, l'ordre d'un élément de G divise le cardinal de G.

Exercice 8 En reprenant la table de composition du groupe de permutations S_3, déterminer tous ses sous-groupes. Montrer qu'ils sont tous cycliques (i.e. engendrés par un seul élément).

Exercice 9 On note U_n le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dont les éléments sont les racines $n-$ièmes de l'unité
$$\left\{\exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right),\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$$

1. Montrer que tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$, sont de la forme précédente (On pourra montrer qu'un sous-groupe de cardinal n est contenu dans U_n, puis conclure par cardinalité).

2. Montrer que $U_d \subseteq U_n$ si et seulement si d divise n.

3.* Déduire des deux questions précédentes que le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par $\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ et $\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$ est U_d, où d est le ppcm de m et de n.

Exercice 10 Soit G un groupe dont l'ordre p est un nombre premier.

1. Montrer que G est cyclique donc commutatif.

2. Montrer qu'il existe un isomorphisme de G sur U_p, où U_p est défini comme dans l'exercice qui précède.

Exercice 11 1. Montrer que l'ensemble des éléments de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ qui sont inversibles (pour $\times$) est un groupe multiplicatif.

2. Faire la liste de ces éléments inversibles lorsque $n = 5$ et $n = 6$.

3. Trouver l'inverse multiplicatif de 6 dans l'anneau $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.