Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 2010-2011

Planche 4

1 Nombres complexes

Exercice 1 1. Calculer les racines carrées des nombres complexes

$$a)\ z_1 = 7 + 24i, \quad b)\ z_2 = 9 + 40i, \quad c)\ z_3 = 1 + i.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

$$a)\ z^2 = -2\sqrt{3} + 2i, \quad b)\ z^2 = 3 - 4i$$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0,$
2. $2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0,$
3. $z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0.$

Exercice 3 Montrer que tout nombre complexe $z \neq 1$ de module 1 s'écrit sous la forme $\frac{x+i}{x-i}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Calculer le module et un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 5 Résoudre de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

En déduire la valeur de $cos\, \frac{\pi}{8}$ et de $sin\, \frac{\pi}{8}$.

Exercice 6

1. Déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. (Utiliser la formule de Moivre.)

2. En déduire une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 7

1. Calculer $cos\, 3\theta$ (resp. $sin\, 3\theta$) en fonction de $cos\, \theta$ (resp. de $sin\, \theta$.)

2. En utilisant la formule du binôme de Newton
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$
exprimer $cos\, n\theta$ et $sin\, n\theta$ en fonction de $cos\, \theta$ et $sin\, \theta$.

   [$cos\, n\theta$ s'exprime suivant un polynôme en $cos\, \theta$ tandis que $sin\, n\theta$ est le produit de $sin\, \theta$ par un polynôme en $cos\, \theta$.]

Exercice 8 Soient $n \in \mathbf{N}^\star$, $\theta \in \mathbf{R}$. Calculer
$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} cos(k\theta), \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} sin(k\theta).$$

Exercice 9 Pour rappel: - Soient $z \in \mathbf{C}^\star$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n = z$.

Ces nombres sont appelés les n racines $n-$ième de z.

1. Représenter dans le plan complexe $\mathbf{C}$ les 6 racines $6-$ ième de 1 et les 4 racines $4-$ ième de -1.

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ racines du polynôme complexe $1 + z + \cdots + z^{n-1}$.

Exercice 10 Soit $s = cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5}$ et $p = cos\frac{2\pi}{5}\, cos\frac{4\pi}{5}$.
Montrer que $s = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{4}$ et dès lors que s et p sont racines de $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$
Pouvez-vous suggérer une construction à la règle et au compas du pentagone régulier?

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes:

1. $z^5 - z = 0$,

2. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$,

3. $\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2}$,

4. $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 12 Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation suivante:
$$x^3 + (1-3i)x^2 - (6-i)x + 10i = 0.$$

Exercice 13 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que

1. $\mid 1 - z \mid \leq \frac{1}{2}$,

2. $Re(1-z) \leq \frac{1}{2}$,
3. $Re(iz) \leq \frac{1}{2}$,
4. $\mid 1 - \frac{1}{z} \mid^2 = 2$,
5. $\mid \frac{z-3}{z+3} \mid = 2$, $\quad f) \quad \mid \frac{z-3}{z+3} \mid < 2$.

Exercice 14 Montrer que

$$\forall z, w \in \mathbf{C}, \ \mid z + w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid .$$

- En déduire que

$$\forall z, w \in \mathbf{C}, \ \mid\mid z \mid - \mid w \mid\mid \leq \mid z + w \mid .$$

Exercice 15 Soient $z, w \in \mathbf{C}$. Etablir la relation

$$\mid z + w \mid^2 + \mid z - w \mid^2 = 2(\mid z \mid^2 + \mid w \mid^2)$$

et donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 16 Soit $c \in \mathbf{C}$ avec $\mid c \mid < 1$.

1. Montrer que $\mid z + c \mid \leq \mid 1 + \bar{c}z \mid$ si et seulement si $\mid z \mid \leq 1$.

   Soient $D = \{z \in \mathbf{C}, \mid z \mid \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbf{C}, \mid z \mid = 1\}$ le cercle unité.

2. Montrer que l'application

$$f : D \longrightarrow D : z \mapsto \frac{z + c}{1 + \bar{c}z},$$

   est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

2 Exemples d'anneaux et de corps

Exercice 17 Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2}, \ a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles est un corps.

Exercice 18
1. Montrer que $\mathcal{A} = \left(\left\{a + ib\sqrt{5}, \ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}, +, \cdot\right)$ est un anneau commutatif unitaire.
2. Montrer qu'un élément z de $\mathcal{A}$ est inversible pour l'opération $\cdot$ ssi $\mid z \mid = 1$. En déduire la liste des éléments inversibles de $\mathcal{A}$.
3. L'anneau $\mathcal{A}$ est-il un corps?

Exercice 19
1. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbb{C}^2, +, \star)$ est un anneau, où $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b) \star (a', b') = (aa' - \overline{b}b', ba' + \overline{a}b')$.
2. Montrer que tout élément non nul de $\mathcal{B}$ est inversible (pour $\star$).
3. $\mathcal{B}$ est-il un corps?