Université Claude Bernard Lyon 1

Licence “Mathématiques et informatique”

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 20010-2011

PLANCHE 2

1 Ecritures symboliques

Exercice 1 Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Ecrire en utilisant $\forall, \exists$ les assertions

$$A = \emptyset, \quad A \cap B \neq \emptyset, \quad A \subset B, \quad A \not\subset B.$$

Exercice 2 Soit $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers et A une partie de $\mathbb{N}$. Ecrire en utilisant $\forall, \exists$ les assertions suivantes

A est une partie finie de $\mathbb{N}$, A est une partie infinie de $\mathbb{N}$,

Tout entier naturel $n \geq 2$ admet un diviseur premier, les éléments de A ont un diviseur premier commun, les éléments de A n'ont aucun diviseur premier commun.

Exercice 3 Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. Que signifie *en mots* les assertions suivantes

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists l \in \mathbb{Z},\ q_n = l, \quad \exists l \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, q_n = l, \quad \forall l \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, q_n = l,$

$\forall q \in \mathbb{Q}_{>0}, \forall n \in \mathbb{N}, \mid q_n \mid < q.$

Attention: Il ne s'agit pas de faire la lecture à voix haute de ces quatre suites de symboles mais de traduire l'énoncé en une phrase courte dont la compréhension est immédiate.

2 Réunion, intersection et différence d'ensembles

Exercice 4 Soient $A = [1, 3], B =]2, 4], C = [1, 2[$. Déterminer $A \cap B, A \cup B, B \cap C$ et $B \cup C$.

Exercice 5 1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes : $A_1 =]-\infty, 0]$, $A_2 =]-\infty, 0[$, $A_3 =]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 =]1, 2[$ et $A_6 = [1, 2[$.

2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants : $C_{\mathbb{R}}A$ et $C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$ [voir aussi exercice **??**].

Exercice 6 Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 les parties du plan $\mathbb{R}^2$ définies par

$$P_1 = \{(x, y), x + y \leq 1\}, \quad P_2 = \{(x, y), x - y \leq 1\}$$

$$P_3 = \{(x, y), -x + y \leq 1\}, \quad P_4 = \{(x, y), -x - y \leq 1\}$$

1. (1) Représenter $P_1 \cap P_2, P_3 \cap P_4, (P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

   [Remarque: on appelle demi-plan fermé l'ensemble des couples (x, y) du plan satisfaisant une inégalité du type $ax + by \leq c$. Tout polygone (convexe) à n côtés du plan peut être défini comme l' intersection de n demi-plans fermés.]

2. Comparer $C_{\mathbb{R}^2}(P_1 \cap P_2)$, $C_{\mathbb{R}^2}P_1 \cap C_{\mathbb{R}^2}P_2$, $C_{\mathbb{R}^2}(P_1 \cup P_2)$ et $C_{\mathbb{R}^2}P_1 \cup C_{\mathbb{R}^2}P_2$. Représenter $(P_1 \setminus P_2) \cup (P_2 \setminus P_1)$ [voir aussi exercice **??**].

Exercice 7 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 8 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication

   $$((A \cup B) \not\subseteq C) \Longrightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C)\,?$$

   Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer l'inclusion $B \subset C$.

Exercice 9 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités suivantes :

1. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.
2. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

Si $A \subset B$, montrer que $C_E B \subset C_E A$.

Exercice 10 Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $F \subset G \Longleftrightarrow F \cup G = G$.
2. $F \subset G \Longleftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$.

3 Applications injectives, surjectives, bijectives

Exercice 11 Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'applications injectives $f : I_2 \to I_n$
2. A quelles conditions portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective?
3. Combien y-a-t-il d'applications injectives de I_m dans I_n?

Exercice 12 Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2, \quad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2, \quad f : [0,1] \to [0,2] : x \mapsto x^2$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + x^3, \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + x^3$$

Exercice 13 Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

et soit

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Calculer $(f \circ f)(x)$. En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 15 L'application

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \mapsto 2^m 3^n$$

est-elle injective? Est-elle surjective? [Indication: se souvenir avant d'écrire]

Pouvez-vous proposer une généralisation à $\mathbb{N}^n$ pour tout naturel $n \geq 2$?

Exercice 16 Soient $f, g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ les applications définies par

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy), \quad g(x, y) = (dx - by, -cx + ay)$$

avec $ad - bc = 1$.

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. En déduire que f est une bijection.

Exercice 17 Pour rappel, la fonction caractéristique

$$\chi_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$$

d'une partie $A \in P(\mathbb{N})$ est définie par $\chi_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\chi_A(n) = 0$ si $n \notin A$.

On note $P_{\text{finie}}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ ayant un nombre fini d'éléments. Montrer que l'application

$$b : P_{\text{finie}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} : A \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_A(n)2^n$$

est une bijection.[Indication: développement en base b.]

Exercice 18 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et φ l'application qui à un entier relatif m associe le reste de la division euclidienne de m par n.

1. Déterminer l'image $\varphi(\mathbb{Z})$.
2. L'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \varphi(\mathbb{Z})$ est-elle injective, surjective, bijective?
3. Montrer que $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(\varphi(m_1) + \varphi(m_2))$.

Exercice 19 Soient E, F, G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f : E \to F$ et $g : F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   (a) $g \circ f = Id_E$.
   (b) $f \circ g = Id_F$.
   (c) $f \circ f = Id_E$.

Exercice 20 Soit f une application de E vers F avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Exercice 21 Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une **section** de f.

1. Montrer que si f possède une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une **rétraction** de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.

4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.

5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.

6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et on a $r = s(= f^{-1}$ par conséquent).

Exercice 22 Soit $P(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective

$$f : E \to P(E).$$

[Indication: considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.]

4 Image d'une application et image réciproque

Exercice 23 Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E. Montrer que

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte.

Exercice 24

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui même définie par
$$f(1) = 4\,,\ f(2) = 1\,,\ f(3) = 2\,,\ f(4) = 2\,.$$
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$; $A = \{1, 2\}$; $A = \{3\}$

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$; $A = [-1, 2]$.

Exercice 25

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$. Déterminer $f([0, 1] \times [0, 1])$, $f^{-1}([-1, 1])$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto cos(\pi x)$ Déterminer $f(\mathbb{N}), f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Exercice 26 Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que

1. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

2. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

Exercice 27 Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.

1. Montrer, que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Montrer, que pour toute partie B de F, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}(f(A))$.

4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f(f^{-1}(B)) = B$.